

Betrachtungen zum Schwingungsverhalten von Rechteckplatten

Dietz, P.; Rolshofen, W.; Schäfer, G.

Das Institut für Maschinenwesen (IMW) erforscht im Rahmen eines EU Forschungsprojektes einen Ansatz zur Schalllokalisierung in Festkörpern. Dabei wurde das Schwingungsverhalten von Rechteckplatten theoretisch, experimentell und durch numerische Simulation untersucht. Die übereinstimmenden Ergebnisse erklären die Beobachtungen als Eigenschwingung.



Within the scope of an EU research project, the Institute of Mechanical Engineering investigates an approach to localise acoustic sources in solids. Therefore, vibration behaviour of rectangular plates has been examined theoretically, experimentally and by numerical simulation. Consistent results exemplify observations as natural oscillation.

1 Einleitung

Im Rahmen der Forschungstätigkeit des Institutes für Maschinenwesen (IMW) im EU Projekt „Tangible Acoustic Interfaces for Computer-Human Interaction (TAI-CHI)“ wird eine Methodik zur Schalllokalisierung in Festkörpern entwickelt /1, 2/.

Der Hintergrund für diese Aktivität ist, wie der menschliche Tastsinn mit Computeranwendungen verknüpft werden kann. Physikalische Objekte bzw. deren komplexe Oberflächen sollen als natürliche berührbare Benutzerschnittstellen funktionieren, die auf der Basis festkörperakustischer Signale eine Verbindung zwischen virtueller und realer Welt herstellen.

Der entwickelte Algorithmus ist anhand experimenteller Versuche überprüft und anschließend systematisch optimiert worden. Im Nachfolgenden wird über die Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Rechteckplatten berichtet, die dazu durchgeführt wurden.

2 Versuchsaufbau und Messdatenerfassung

Bei dem verfolgten Ansatz werden Beschleunigungsaufnehmer auf eine Rechteckplatte (s. **Tabelle 2**) aufgebracht, um das Berühren bzw. Klopfen auf die Platte zu lokalisieren. Dabei hat sich mehrfach die Charakteristik des Schwingungsverhaltens wie in **Bild 1** dargestellt. Dort sind aus den gemessenen Beschleunigungen im berechneten Amplitudenspektrum mehrere lokale Maxima zu beobachten. Diese befinden sich ungefähr bei den Frequenzen: 156 Hz, 272 Hz, 391 Hz, 467 Hz (nicht markiert), 581 Hz und 684 Hz.

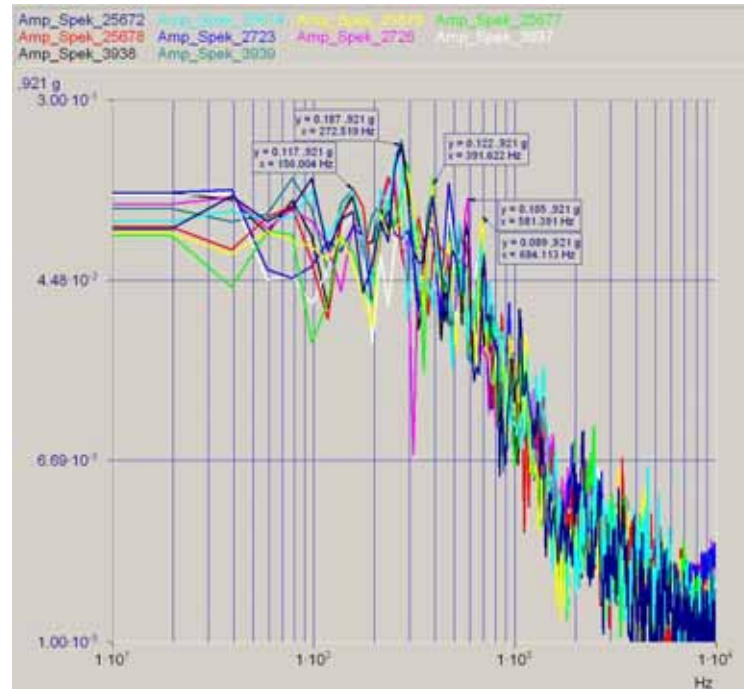


Bild 1: Aus den Beschleunigungssignalen berechnete Amplitudenspektren, wobei diese durch ein gleitendes Fenster über viele Spektren gemittelt wurden. Auffallend sind einige lokale Maxima.

Um diese Beobachtung gegenüber der Schwingung einer Rechteckplatte abzugrenzen, wurde das Schwingungsverhalten weiter untersucht.

2.1 Biegeschwingungen von Rechteckplatten

Ausgehend von dem Modell des Einmassenschwingers kann das Körperschallverhalten einfacher Strukturen beschrieben werden.

Als Platte wird eine Struktur bezeichnet, deren Wanddicke deutlich geringer ist als deren Ausdehnung. Die Plattendicke h wird über die Gesamtfläche, welche durch die Seitenlängen a und b aufgespannt wird, als konstant angenommen. Wird ein solcher Körper an seiner Oberfläche zu Schwingungen angeregt, so bilden sich unterschiedliche Wellenarten aus. An dieser Stelle soll das Augenmerk nur auf die „Lamb-Wellen“ gelegt werden /3/, die aus der Überlagerung von Druck- und vertikalen Scherwellen entstehen und in plattenförmigen Körpern beobachtet werden, wenn die Wellenlänge $\lambda \gg h$ die Plattendicke ist.

Hierbei muss beachtet werden, ob die Oberseite der Platte symmetrisch oder asymmetrisch zur Unterseite schwingt. In der Literatur /4, 5/ lassen sich für diese Arten auch die folgenden Bezeichnungen finden: Dehnungswelle (symmetrisch) bzw. Biegungswelle (asymmetrisch). Die weiteren Ausführungen beziehen sich immer nur auf die asymmetrischen Lamb-Wellen und für die Herleitung der Wellengleichung sowie der Randbedingungen sei auf andere Publikationen verwiesen /6, 7/.

Mit den entsprechenden Voraussetzungen der Kirchhoffschen Plattentheorie lautet die Bewegungsgleichung der ungedämpften Platte:

$$\underbrace{B\Delta w}_{\text{Steifigkeits-}} + \underbrace{\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}_{\text{Trägheits-}} = \underbrace{p(x, y, t)}_{\text{äußere Kraft}} \quad (1)$$

Mit B ist die Biegesteifigkeit der ungedämpften Platte, mit w die Durchbiegung und ρ die Dichte sowie die Flächenlast p definiert.

B lässt sich mit dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnungszahl μ wie folgt berechnen.

$$B = \frac{Eh^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (2)$$

Mit den Randbedingungen, die die Lagerung der Platte beschreiben,

- eingespannt
- frei gestützt
- kräftefrei

ergibt sich eine Lösung für (1), die durch die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t=0$ ergänzt werden.

Die freien Schwingungen der Rechteckplatte ergeben sich durch eine Lösung der homogenen Bewegungsgleichung aus (1). Es lässt sich zeigen s. /8, 9/, dass für die Eigenfrequenzen einer homogenen, frei gestützten (allseitig gelenkig gelagerte) Platte gilt:

$$f_{m,n} = \frac{\omega_{m,n}}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{B}{\rho h}} \quad (3)$$

Die Lösungsfunktionen für die freie Schwingung der Rechteckplatte werden als Eigenfunktionen bezeichnet, welche die Eigenschwingungen der Platte (s. **Bild 2**) angeben und deren Eigenkreisfrequenz $\omega_{m,n}$ sich nach (3) berechnen lässt. Mit m und n wird die Ordnung dieser Eigenfunktionen benannt.

Man bezeichnet die Bereiche mit Erhebung bzw. Tal der Eigenfunktion als „Bauch“ und die Gebiete, die den Wert Null annehmen, als Knotenlinie.

2.2 Dispersion

Ein bedeutender Effekt bei der Betrachtung von Schwingungen in Festkörpern ist das Auftreten von „Dispersion“, d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist frequenzabhängig. Aus dem Zusammenhang zwischen Wellenlänge λ und Kreisfrequenz ω ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit c_B der Welle unter Berücksichtigung von

$$c = \lambda \cdot f = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k} \quad \text{bzw.} \quad k_{m,n} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (4)$$

$$c_B = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{\rho h}} \quad (5)$$

Streng genommen gilt dies nur für unendliche harmonische Schwingungen. Da sich diese im beobachteten Fall (s. **Bild 1**) aus unterschiedlichen Sinus- bzw. Cosinusschwingungen zusammensetzen lässt, haben die jeweiligen Frequenzanteile eine unterschiedliche Geschwindigkeit. In **Bild 3** sind sowohl die Wellenlänge als auch die Phasengeschwindigkeit gegen die Frequenz aufgetragen. Diese Dispersionskurven sind in Zusammenarbeit mit dem Laboratoire Ondes et Acoustique (LOA), Paris, entstanden und enthalten zum Vergleich das dispersionsfreie Medium Luft bei 20 °C.

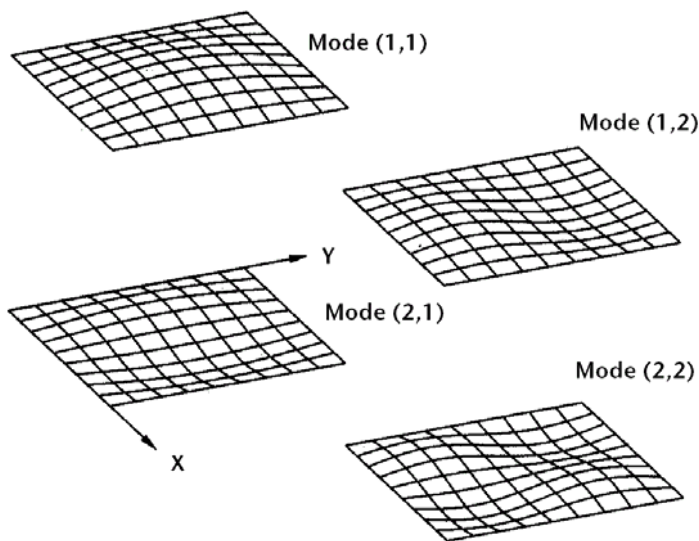


Bild 2: Eigenfunktionen einer allseits gelenkig gelagerten Platte, wobei z.B. die Angabe Mode (2,1) bedeutet $m=2$ und $n=1$ nach /8/.

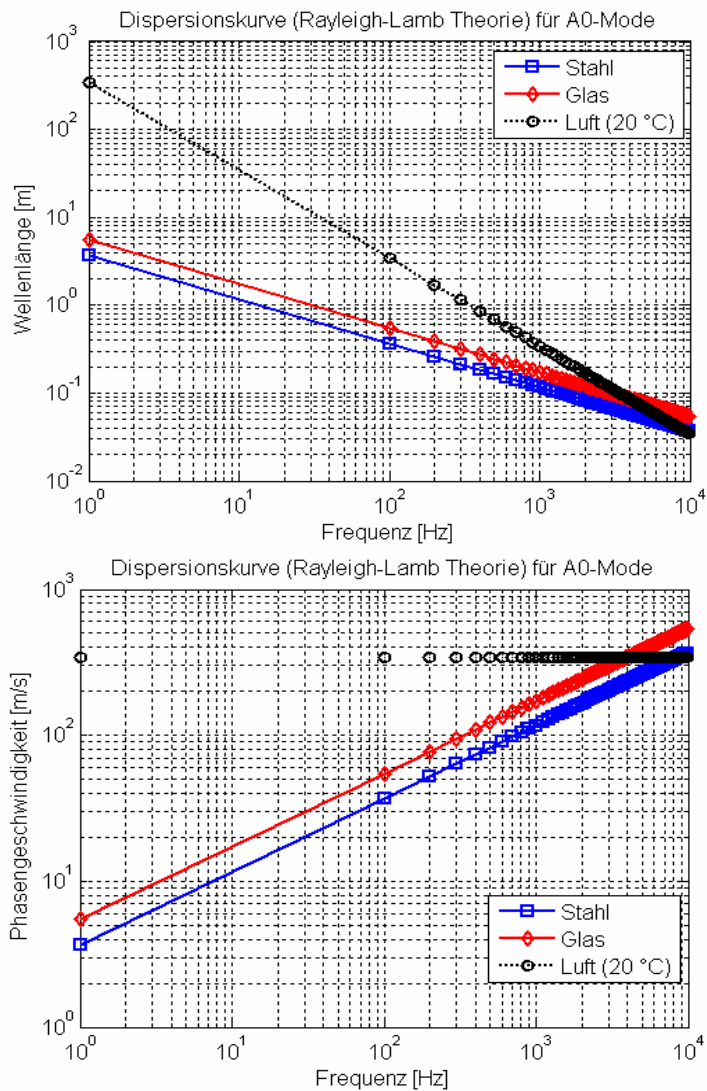


Bild 3: Dispersionskurven für die Rechteckplatten aus Stahl und Glas (s. **Tabelle 1** und **2**) im Vergleich zum dispersionsfreien Medium Luft (bei 20 °C). Wellenlänge über Frequenz (oben) sowie Phasengeschwindigkeit über Frequenz (unten).

2.3 Verwendete Platten aus Stahl und Glas

Während der Untersuchung wurden unterschiedliche Geometrien und Materialien eingesetzt. Beispielhaft werden hier eine Platte aus Stahl und Glas mit den entsprechenden Kennwerten aus **Tabelle 1** und **2** diskutiert.

Material	Seitenlänge „a“ [m]	Seitenlänge „b“ [m]	Plattendicke „h“ [m]
Stahl	0,600	0,400	0,0014
Glas	0,436	0,332	0,0028

Tabelle 1: Abmessungen für die verwendeten Rechteckplatten

Material	Elastizitätsmodul „E“ [N/m ²]	Querdehnungszahl „μ“	Dichte „ρ“ [kg/m ³]
Stahl	$2,181 \cdot 10^{11}$	0,310	8.392
Glas	$0,845 \cdot 10^{11}$	0,201	2.569

Tabelle 2: Werkstoffdaten von Stahl und Glas (experimentell ermittelt)

In **Tabelle 3** und **4** sind die ersten Eigenfrequenzen für die jeweilige Platte dargestellt, die nach (3) berechnet wurden. Neben dieser Berechnung wurden noch zwei weitere Ansätze zur Ermittlung der Eigenfrequenzen verfolgt, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

$f_{m,n}$	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
m = 1	30,7	94,6	200,9	349,9	541,4
m = 2	59,1	122,9	229,3	378,2	569,7
m = 3	106,4	170,2	276,6	425,5	617,0
m = 4	172,6	236,4	342,8	491,7	683,2
m = 5	257,7	321,5	427,9	576,8	768,3

Tabelle 3: Die ersten Eigenfrequenzen $f_{m,n}$ für Stahlplatte in Hz

$f_{m,n}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$m = 1$	107,4	312,1	653,4	1131,2	1745,5
$m = 2$	224,7	429,4	770,7	1248,5	1862,8
$m = 3$	420,2	625,0	966,2	1444,0	2058,4
$m = 4$	693,9	898,7	1240,0	1717,8	2332,1
$m = 5$	1045,8	1250,6	1591,9	2069,7	2684,0

Tabelle 4: Die ersten Eigenfrequenzen $f_{m,n}$ für Glasplatte in Hz

2.4 Chladnische Klangfiguren und numerische Simulation

Mit Hilfe eines Verfahrens, welches auf Chladni zurückgeht, gelingt es mit einfachen Mitteln, einen optischen Eindruck von ruhenden und schwingenden Stellen eines Festkörpers zu erzeugen. „Man bestreut vor der Erzeugung eines bestimmten Tones den Resonanzkörper mit feinem Sand, der dann beim Schwingen von den sich bewegenden Stellen weggefegt wird und sich an Stellen der Ruhe ansammelt“ /10/. Im oberen Teil von **Bild 4** ist der Aufbau dieser Experimente nach Chladni zu sehen.

Dort ist eine Glasplatte frei hängend durch elastische Bänder und Saugfüße über einem Lautsprecher befestigt. Dieser wird über einen Verstärker mit einem Frequenzgenerator verbunden, wo in Zehntelfrequenzstufen die jeweiligen Anregungen eingestellt werden können. Auf der Platte ist zur Orientierung ein quadratisches Gitter gezeichnet. Vor jedem Versuch wird auf den Platten feiner Quarzsand verstreut, der sich in diesem Fall zu zwei Linien in Längsrichtung anhäuft.

Der gleiche Versuchsaufbau wurde auch bei der Stahlplatte verwendet (s. **Bild 5**), wobei dort die elastische Aufhängung durch vorhandene Bohrungen erfolgte.

Außerdem wurde mit den Parametern der jeweiligen Platte eine numerische Simulation mit FEM durchgeführt. Dabei ist von keiner Einspannung der Platte ausgegangen worden und die Lösungen beschreiben die einzelnen Moden der Plattenschwingung. Beispielhaft sind diese im unteren Teil von **Bild 4** und **5** dargestellt.

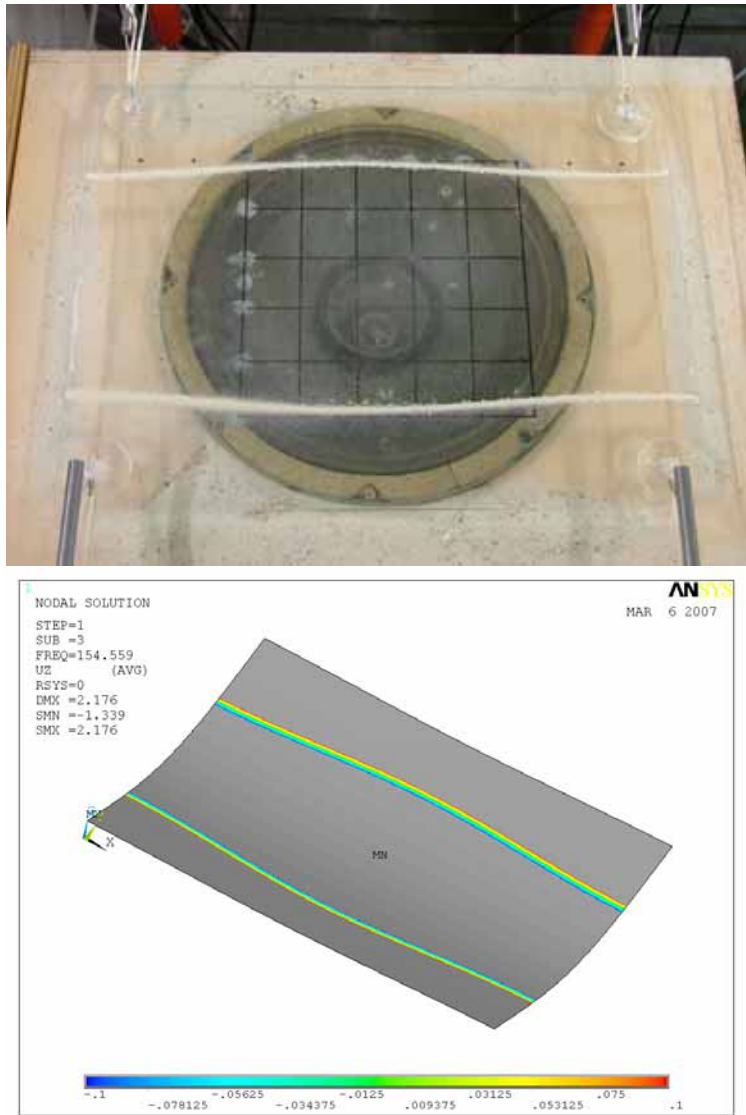


Bild 4: Versuchsaufbau zur experimentellen Bestimmung der Eigenschwingungen einer Glasplatte (oben) sowie Simulationsergebnis für die entsprechenden Materialparameter (unten).

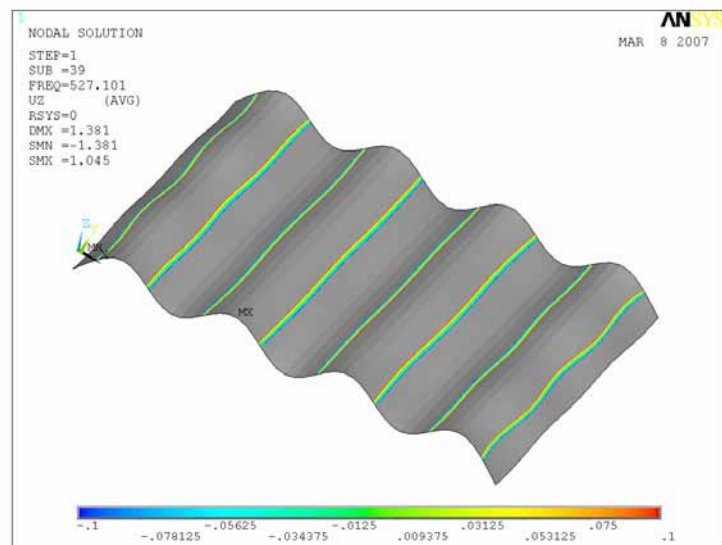
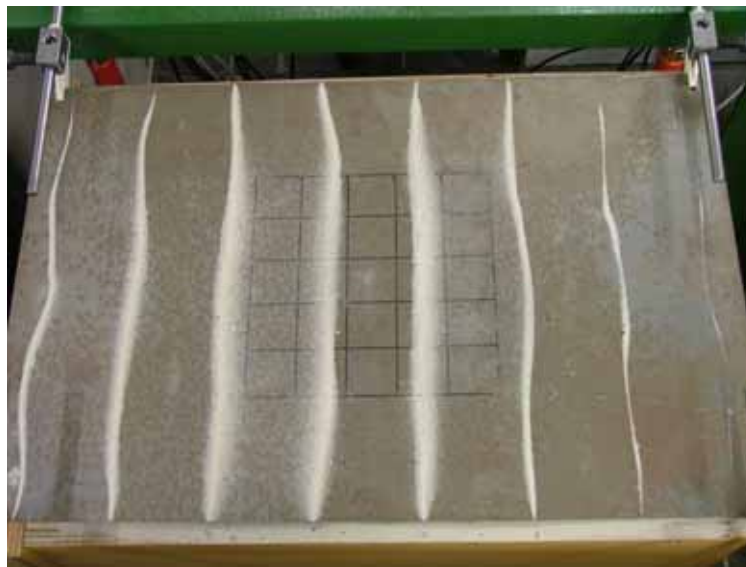


Bild 5: Versuchsaufbau zur experimentellen Bestimmung der Eigenschwingungen einer Stahlplatte (oben) sowie Simulationsergebnis für die entsprechenden Materialparameter (unten).

Die Chladnische Klangfigur der Glasplatte ist bei einer Anregung von 143 Hz entstanden und die gleiche Mode lässt sich in der Simulation bei 154 Hz beobachten. Die dargestellten Ergebnisse für die Stahlplatte sind 581 Hz und 527 Hz in der Simulation.

Der Unterschied in der zugehörigen Anregungsfrequenz lässt sich durch abweichende Annahmen des Modells zum Experiment erklären; einerseits die Randbedingungen durch die Aufhängung und andererseits die experimentelle Bestimmung der Elastizitätsparameter. Der Frequenzabstand bleibt bei anderen ermittelten Moden konstant, was diesen systematischen Einfluss nachweist. Angemerkt sei an dieser Stelle aber ebenfalls, dass neben der Befestigung auch die Lage der Anregung, sowie die „Tonhöhe“ einen Einfluss auf die Klangfiguren haben.

Interessanterweise konnte für eine Vielzahl der Eigenfrequenzwerte nach der **Tabelle 3** und **4** bei nahezu gleicher Frequenz im Experiment als auch der Simulation eine Schwingungsmoden bestimmt werden. Durch diese gute Übereinstimmung lässt sich die Schwingungscharakteristik aus **Bild 1**, wie sich vermuten ließ, auf das Eigenschwingungsverhalten von Rechteckplatten zurückführen. Sicherlich kommt es bei einer Vielzahl von Moden zu einer Überlagerung, da diese oft an gleichen oder benachbarten Frequenzen auftreten. Trotzdem tauchen in dem ermittelten Amplitudenspektrum nur einige bedeutungsvolle Schwingungen auf. Welche Vorteile sich daraus für den Algorithmus der Lokalisierung ergeben bzw. welcher Einfluss sich daraus auf die Anordnung der Sensoren herleiten lässt, ist zurzeit noch Gegenstand weiterer Untersuchung.

Erfolgreich konnten die theoretischen Angaben aus der Literatur durch einen experimentellen Aufbau und eine numerische Simulation überprüft werden. Unter Berücksichtigung der entsprechenden Voraussetzungen stimmen die Untersuchungen gut überein.

3 Zusammenfassung

Innerhalb der Erforschung eines Algorithmus zur Schalllokalisierung in Festkörpern ergab sich die Notwendigkeit, das Schwingungsverhalten von Rechteckplatten genauer zu untersuchen. Daher wurden, ausgehend von theoretischen Berechnungen der Literatur zu Biegeschwingungen in Rechteckplatten, experimentelle Untersuchungen und numerische Simulationen eingesetzt. Zusätzlich wurde der Effekt der Dispersion bei den eingesetzten Materialien bestimmt.

Insgesamt lässt sich unter Berücksichtigung der entsprechenden Voraussetzung durch jedes durchgeführte Verfahren das beobachtete Schwingungsverhalten der Rechteckplatten ermitteln.

4 Danksagung

Die Arbeiten wurden im Rahmen des EU FP6 IST Projektes „Tangible Acoustic Interfaces for Computer-Human Interaction (Project Ref.: 507822)“ durchgeführt. Die Unterstützung durch die Europäische Kommission sowie der Kollegin Guillemette Ribay (LOA) und der Kollegen Jan Lukas Hilgermann (IMW) und Sergej Mamaschew (IMW) wird dankbar anerkannt.

5 Literatur

- /1/ <http://www.taichi.cf.ac.uk/>
- /2/ Rolshofen, W.; Dietz, P.; Schäfer, G.: Application of Tangible Acoustic Interfaces in the Area of Production Control and Manufacturing. J. Jacko (Ed.): Human-Computer Interaction, Part II, HCII 2007, LNCS 4551, pp. 920–925, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, ISBN: 978-3-540-73106-1.
- /3/ Lamb, H.: On Waves in an Elastic Plate. Proc. of the Roy. Soc. of London, Series A, pp. 114-128, London 1917.
- /4/ Bergmann, L.: Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1949.
- /5/ Trendelburg, F.: Einführung in die Akustik. Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg 1961, Dritte Auflage, Erlangen 1960.
- /6/ Szabó, I.: Höhere Technische Mechanik. Fünfte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1985.
- /7/ Cremer, L.; Heckl, M.: Körperschall. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996.
- /8/ Kollmann, F.; Schösser, T.; Angert, R.: Praktische Maschinenakustik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, ISBN: 3-540-20094-0.
- /9/ Storm, R.: Kompendium Maschinenakustik Teil 1: Maschinenakustik – Grundlagen. Studienskript, typographys GmbH, Darmstadt 2006.
- /10/ Scheminzky, F.: Die Welt des Schalles, Verlag „Das Bergland-Buch“, Salzburg 1943.