

Berechnungen mit der externen FEM-Approximation nach Apanovich

Müller, D.

Der Anwendungsbereich der Methode der finiten Elemente ist sehr weit und vielseitig. Ebenso gibt es verschiedene Methoden, wie die Ansatzfunktionen der finiten Elemente konstruiert werden. Eine noch nicht so verbreitete neue Methode der finiten Elemente folgt einem Ansatz von Victor Apanovich. Bei der externen FEM-Approximation werden Ansatzfunktionen festgelegt, die einer notwendigen und hinreichenden Bedingung einer externen Approximation genügen.

The scope of the Finite Element Method is wide and versatile. There are also different methods for the assembling of basis functions for the finite elements. A new and yet not dispersed Finite Element Method follows the approach of Victor Apanovich. The external FEM-Method is based on basis functions that suffice the condition of an external approximation.

1 Einleitung

Im Rahmen der Diplomarbeit *Untersuchungen zu externen FEM-Approximationen nach Apanovich /6/*, die am Institut für Maschinenwesen unter Zusammenarbeit mit dem Institut für Mathematik durchgeführt worden ist, ging es um eine mathematische Beschreibung und erste Anwendung der Methode der externen FEM-Approximation, die Victor Apanovich 1991 in seiner Arbeit /1/ vorgestellt hat.

Dieser Beitrag ist als einführende Motivation in das Thema der externen FEM-Approximation gedacht und gibt einen ersten Einblick anhand einer Modelllaufgabe. Die vollständigen theoretischen Grundlagen für die FEM-Approximation, sowohl klassisch und auch extern, würden den Rahmen dieses Beitrags sprengen. Ausführlicher werden diese Grundlagen in der Diplomarbeit oder der angegebenen Literatur /3,4/ behandelt.

2 Grundlagen der klassischen und externen FEM-Approximation

Probleme aus der mathematischen Physik sind oft durch eine Differentialgleichung in Verbindung mit Rand- und eventuell Anfangsbedingungen charakterisiert. Bisher wurden vorwiegend zwei Lösungswege besprochen.

Zum einen gibt es die Möglichkeit der Findung einer geschlossenen Lösung eben dieser Differentialgleichung. Zum anderen ist die Methode der finiten Elemente weit verbreitet, die im Grunde ein Verfahren von RAYLEIGH-RITZ bei quadratischen Extremalproblemen ist, wobei jedoch spezielle Ansatzfunktionen verwendet werden. Jede Ansatzfunktion ist dabei eine Funktion, die nur in einem Teilgebiet $K^j \subset \Omega$ von Null verschiedene Werte annimmt und außerhalb identisch Null ist. Eine so definierte Ansatzfunktion besitzt nur einen kleinen Träger. Somit enthalten die bei der Diskretisierung entstehenden Matrizen nur wenige von Null verschiedene Einträge. Damit hängt die numerische Stabilität des Verfahrens zusammen.

Die Methode der externen FEM-Approximation ist in wesentlichen Zügen mit der klassischen Methode der finiten Elemente verwandt. Sie basiert ebenso auf einem speziellen RAYLEIGH-RITZ-Verfahren. Mit Ausnahme der Prozedur der Konstruktion von speziellen finiten Elementen, ist das rechnerische Verfahren der externen Methode analog zur klassischen Methode.

Die abweichende Konstruktion der finiten Elemente in der externen FEM-Approximation erzeugt Ansatzfunktionen, die einer externen Approximation entsprechen. Eingeführt wurde die Definition einer externen Approximation 1964 von Jean Ce'a /2/.

In der klassischen Methode der finiten Elemente ist ein endlich dimensionaler finiter Elemente-Raum X_h ein linearer Unterraum des linearen Lösungsraums V :

$$X_h \subset V.$$

In der externen FEM-Approximation verzichtet man jedoch auf die Erfüllung der obigen Inklusion. „Extern“ bedeutet dabei, daß der Approximationsraum X_h kein Unterraum von V ist:

$$X_h \not\subset V.$$

Die Näherungslösung wird in $X_h \subset \bar{V}$ gesucht. \bar{V} enthält V als abgeschlossenen Teilraum. Die Lösungsfunktion wird also quasi 'von außen' angenähert.

Das Verfahren der externen FEM-Approximation soll im Folgenden an einer einfachen Modelllaufgabe veranschaulicht werden.

3 Modellaufgabe

3.1 Aufgabenstellung

Es wird der Fall einer quadratischen Platte unter Einwirkung einer Einheitsverschiebung im Mittelpunkt betrachtet. Durch die Belastung erfährt die Platte eine Verformung, die berechnet werden soll.

Die Lösung des homogenen DIRICHLETschen Randwertproblems kann auf zwei äquivalente Weisen definiert werden:

1. Randwertproblem:

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega$$

2. Variationsaufgabe:

$$\int_{\Omega} \text{grad} \cdot u * \text{grad} \cdot v d(x, y) = \int_{\Omega} f v d(x, y), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Das betrachtete Gebiet Ω ist ein Quadrat mit der Kantenlänge 1:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 = (0,1)^2$$

Die Funktion f wird als identisch 1 vorausgesetzt.

Die Approximation der Lösung des Randwertproblems wird mit im Unterraum übereinstimmenden finiten Elementen durchgeführt. Dies sind spezielle finite Elemente, deren Ansatzfunktionen der Bedingung der externen Approximation genügen.

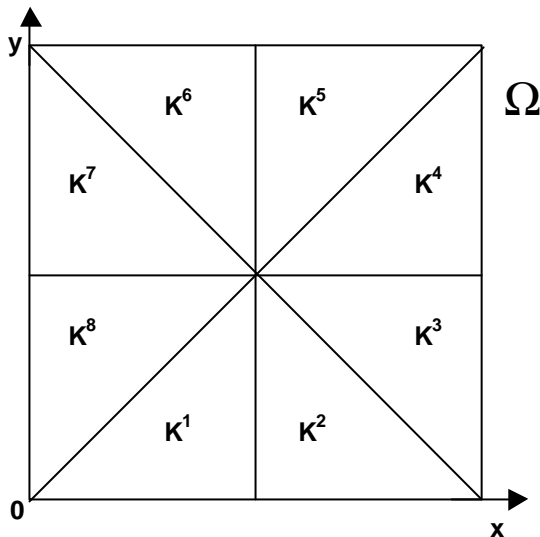


Bild 1: Beispielerzeugung des Gebiets Ω

Für die Elementierung des Gebiets Ω wurde jeweils eine Triangulierung τ gewählt. Zur Veranschaulichung beschränken wir uns zuerst auf eine Elementierung, die das Gebiet in acht Dreiecke mit gleicher Fläche zerlegt (vgl. Bild 1):

$$\tau = \{K^1, \dots, K^8\}.$$

Für eine verbesserte Approximation wurde noch eine Triangulierung mit 102 Elementen gerechnet.

Für die Approximation der gesuchten Lösung wählen wir einen linearen Ansatz auf allen Elementen. Die allgemeine Form der Polynome lautet:

$$u(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y, u \in P_1(K)$$

Das Spezielle bei der externen FEM-Approximation ist, daß die Ansatzfunktionen nur über den Rändern der finiten Elemente Werte ungleich Null annehmen. Jede Kante eines Dreiecks ∂K_r entspricht einem Wegelement K_r der Triangulierung τ :

$$\partial K_r \subset K \in \tau, 1 \leq r \leq 3$$

Für den linearen Ansatz besitzt das im Unterraum übereinstimmende finite Element drei Randfreiheitsgrade, entsprechend jeder Dreiecksseite.

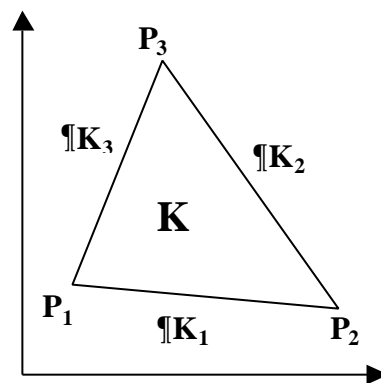


Bild 2: Bezeichnungen am finiten Element

3.2 Festlegungen am finiten Element

Jedes Dreieck ist durch seine drei Eckpunkte eindeutig bestimmt. Diese Punkte werden als Knoten P bezeichnet (vgl. Bild 2). Die Kanten des Dreiecks, das sind die Strecken zwischen den Knoten, werden bei der externen FEM-Approximation zusätzlich mit ∂K bezeichnet (vgl. Bild 2).

Über den Kanten werden die Freiheitsgrade bestimmt. Entsprechend ihrer Anordnung erfolgt die Zuordnung bei der Kompilation der Gesamtsteifigkeitsmatrix. Die globale Numerierung der Kanten und der Knoten des zerlegten Gebiets Ω ist in Bild 3 dargestellt.

Die Reihenfolge der Knoten und Kanten, die zu einem Element gehören ist mathematisch positiv angeordnet. Entsprechend der Reihenfolge der Knoten werden auch die Kantennummern angegeben. Die erste Kante liegt zwischen dem ersten und zweiten Knoten, die beiden anderen Kanten folgen im mathematisch positiven Sinn. Das finite Element K^1 besteht zum Beispiel aus den Knoten 5,1,2 und den Kanten 4,1,5.

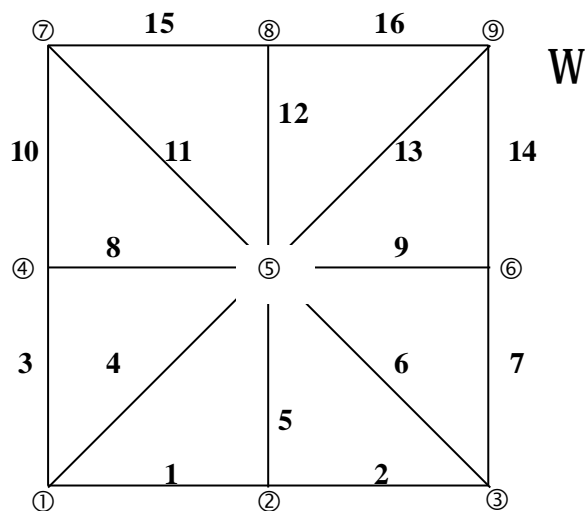


Bild 3: Numerierung der Referenzen, mit
 ① : Knotennummer;
 1 : Kantennummer.

3.3 Ablauf der Berechnung

Die Berechnung der Freiheitsgrade und Kompilation der Gesamtsteifigkeitsmatrix ist für die acht Elemente noch von Hand lösbar. Der Ablauf der Berechnung soll hier aber nur kurz skizziert werden.

Nach der Festlegung der Geometriedaten und Zuordnung der Numerierung können die Randfreiheitsgrade bezüglich einer Standardbasis bestimmt werden. Als Standardbasis für den linearen Ansatz wurden die Funktionen {1, x, y} auf allen Elementen gleich gewählt.

Die allgemeine Definition der Freiheitsgrade für zweidimensionale im Unterraum übereinstimmende finite Elemente lautet:

$$\forall p \in P : \mathbf{j}(p) = \int_{\partial K_r} g(t) \cdot \mathbf{g}_r^K p d\mathbf{g}, 1 \leq r \leq 3$$

Die Funktion g(t) ist für die Beispielaufgabe identisch 1. $\gamma(p)$ entspricht der Parametrisierung der Basisfunktionen entlang der entsprechenden Kantenwege. Über jeder Kante des finiten Elements werden bezüglich jeder Basisfunktion die Randfreiheitsgrade berechnet. Die einzelnen Ergebnisse setzen sich in einer Elementmatrix der Dimension 3x3 zusammen.

Matrixinversion der Elementmatrizen ergibt die Koeffizienten r_{ik} , die mit den Ausgangsbasisfunktionen p_i als Linearkombination die Elementformfunktionen des finiten Elements bestimmen:

$$p = \sum_{i=1}^3 p_i r_{ik}$$

Entsprechend der Variationsgleichung, die der Aufgabe zugrunde liegt, werden nun unter Einbezug der Elementformfunktionen die einzelnen Integrale berechnet. Dies liefert die jeweiligen Elementsteifigkeitsmatrizen und -vektoren.

Die Kompilation der Gesamtsteifigkeitsmatrix und des Gesamtvektors ist der letzte Rechenschritt vor dem Lösen des linearen Gleichungssystems. Dabei werden die Beiträge der einzelnen Elemente, die in den Elementsteifigkeitsmatrizen und -vektoren als Werte vorliegen, zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix A und einem Gesamtvektor b mit einem speziellen Verfahren zusammengefaßt. Unter Berücksichtigung der gewählten Numerierung der am Element beteiligten Kantenvariablen werden die Beiträge durch Superposition zusammengefaßt. Jeder Träger liefert einen Eintrag in der Matrix bzw. dem Vektor.

Element	Kanten			Knoten		
	1	2	3	1	2	3
1	4	1	5	5	1	2
2	6	5	2	3	5	2
3	5	3	6	6	7	9
4	13	9	14	9	5	6
5	13	16	12	5	9	8
6	11	12	15	7	5	8
7	11	10	8	5	7	4
8	4	8	3	1	5	4

Tab. 1: Übersicht Numerierung der Beispielscheibe

Der Kompilationsprozess lässt sich ganz allgemein wie folgt beschreiben: Steht in der Liste (vgl. Tab. 1) der Nummern der Kantenvariablen an der Position j die Nummer l und an der Position k die Nummer m, so ist beispielsweise der Wert des Elementes s_k der Elementsteifigkeitsmatrix S_e zum Element a_m der Gesamtsteifigkeitsmatrix A zu addieren. Ferner ist die Komponente b_j des Elementvektors b_e zur Komponente b_l des Gesamtvektors b zu addieren.

Dies liefert uns für das Beispiel eine Gesamtsteifigkeitsmatrix der Dimension 16x16 und einen Gesamtvektor der Dimension 16. Die Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$ der Beispielaufgabe sorgt dafür, daß das lineare Gleichungssystem auf die Berechnung der Variablen der acht inneren Kanten reduziert werden kann. Die Variablen der äußeren Kanten besitzen den Wert Null.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A x = b$$

liefert den globalen Kantenvariablenvektor x . Eine Linearkombination der Ansatzfunktionen bestimmt die Approximationsfunktion.

4 Ergebnisse und Folgerungen

Die Programmierung der externen FEM-Approximation erfolgte mit Hilfe des mathematischen Rechenprogramms MATHEMATICA, vgl. /5/.

Schon mit wenigen Elementen und linearen Ansatzfunktionen wurden gute Approximationen erreicht, die der klassischen Theorie entsprechen. Die Güte der Approximation nimmt mit zunehmender Elementzahl und höherer Ordnung des Ansatzes schnell zu.

Aufgrund des Ansatzes ist die Approximationsfunktion nicht zwangsläufig stetig. Für eine Angleichung müßten separate Algorithmen angewandt werden. Der Verzicht auf Stetigkeit ermöglicht aber eine leichtere bzw. schnellere Wahl der Ausgangsbasisfunktionen der finiten Elemente, was einen Vorteil dieser Methode darstellt.

Die beiden Ausgabeplots von den Zerlegungen in acht (vgl. Bild 4) und der in 102 Elemente (vgl. Bild 5) bilden die Approximationsfunktion ab.

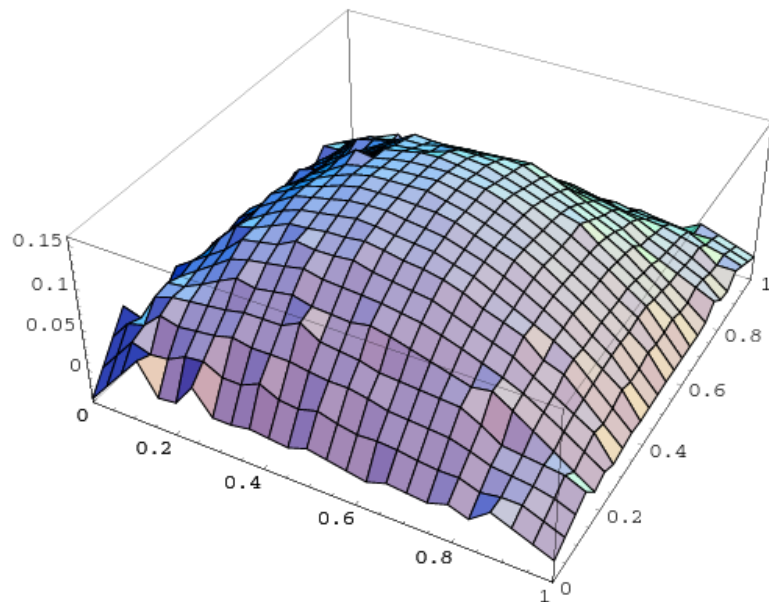


Bild 5: Ergebnisplot 102 Elemente

5 Zusammenfassung

Die externe FEM-Approximation basiert auf dem gleichen theoretischen Ansatz der klassischen Methode. Jedoch werden als Freiheitsgrade die Kanten der finiten Elemente und nicht die Knoten gewählt. Die Ansatzfunktionen genügen einer notwendigen und hinreichenden Bedingung einer externen Approximation, was eine einfachere Wahl der Ausgangsbasisfunktionen ermöglicht. Folge ist ein Approximationsraum, der kein Unterraum des linearen Lösungsraums ist.

6 Literatur

- /1/ Apanovich, V.; The method of external Finite Element Approximation, Minsk 1991, ISBN 5-339-00597-6
- /2/ Ce'a, J.; Approximation variationnelles des problemes aux limites, Ann. Inst. Fourier 1964 Vol. 14, pp. 345-444
- /3/ Knothe, K., Wessels, H.; Finite Elemente, Berlin: Springer-Verlag 1991
- /4/ Schwarz, H.; Methode der Finiten Elemente, Stuttgart: Teubner 1991
- /5/ Wolfram, S.; Mathematica – A system for doing Mathematics by Computer, Addison-Wesley 1991
- /6/ Müller, D.; Untersuchungen zu externen FEM-Approximationen nach Apanovich, Diplomarbeit am IMW TU Clausthal 1999

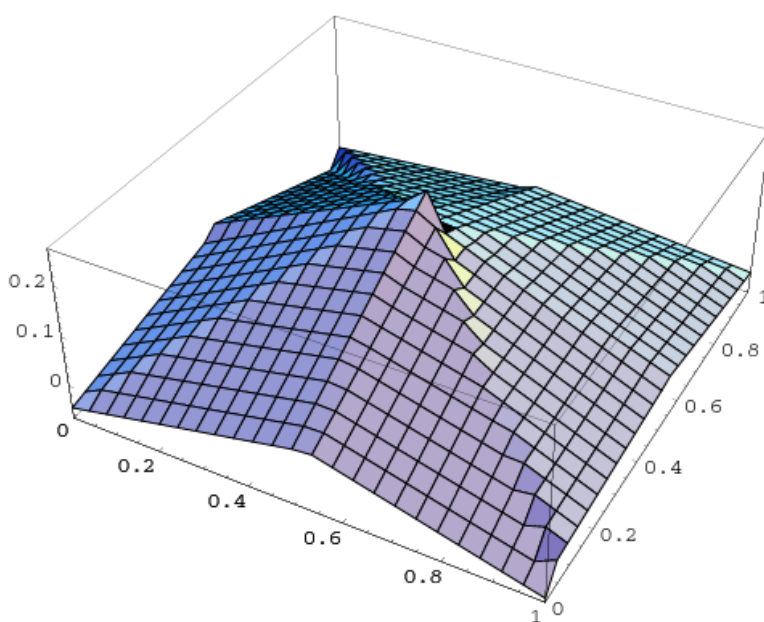


Bild 4: Ergebnisplot acht Elemente