

## Modell zur Beschreibung von Passverzahnungen bei schwingungsdynamischen Untersuchungen

Garzke, M.

*Vorgestellt wird ein Modell zur Beschreibung des Steifigkeitsverhaltens von Passverzahnungen unter Drehmomentbelastung bei schwingungsdynamischen Simulationen (NVH).*

*The paper describes a stiffness modell of splines under torque for computer simulations concerning noise, vibrations and harshness problems (NVH).*

### 1 Einleitung

Die Erfüllung des Zuverlässigkeitskriteriums "Dauerhaltbarkeit" hinsichtlich Verschleiß und Festigkeit ist neben Kosten, Zeit und Verfügbarkeit ein unumstößliches Qualitätsmerkmal von antriebstechnischen Lösungen. Das o.g. Kriterium wird dabei oftmals gedanklich vom Ingenieur mit relativ "großen" Amplituden gekoppelt. Jedoch können auch kleine Amplituden Probleme bereiten, insbesondere wenn diese im Eigenfrequenzbereich liegen und somit unerwünschte akustische und schwingungsdynamische Effekte im Antriebsstrang verursachen. Letztendlich kann dadurch auch die Dauerhaltbarkeit negativ beeinträchtigt werden.

### 2 Steifigkeitsmodell der Passverzahnung

Die zunehmende Etablierung von Simulationsmethoden ermöglicht bereits in einem frühen Stadium des Produktentwicklungsprozesses die Beurteilung u.a. des dynamischen Verhaltens von Bauteilen und Baugruppen. Voraussetzung für eine fundierte Ergebnisauswertung ist neben entsprechender Fachkenntnis und Urteilskraft des Anwenders die Verwendung von Simulationsmodellen, die das reale Bauteilverhalten genügend genau abbilden.

Passverzahnungen (Mitnehmerverzahnungen; früher auch unter den Begriffen Zahn- und Keilwellen-Verbindungen bekannt) bilden aus verschiedenen Gründen wichtige Systemkomponenten im Antriebsstrang energieumwandelnder Maschinen /1/:

- leichte Montierbarkeit
- hohe Leistungsdichte
- Selbstzentrierung

Die formschlüssige Welle-Nabe-Verbindung nach **Bild 2** setzt sich zusammen aus:

- dem freien Wellenstück vor der Verbindung (Bereich ungestörter Torsion /2/; Steifigkeit  $c_{\text{Welle}}$ )
- dem Wellengrundkörper im Verbindungsbe-  
reich, in dem die Wellenzähne eingebettet sind  
(Steifigkeit  $c_{\text{WeKon}}$ )
- der Anzahl der tragenden Zahnpaare von Welle  
und Nabe (Steifigkeit  $c_{\text{Verzahnung}}$ )
- dem Nabengrundkörper zur Aufnahme der Na-  
benzähne (Steifigkeit  $c_{\text{Nabe}}$ )

Das Modell zur Unterteilung der gesamten Pass-  
verzahnung (Gesamtsteifigkeit  $c_{\text{ges}}$ ) in die entspre-  
chenden Einzelsteifigkeiten zeigt **Bild 3**. Dabei bil-  
den die Steifigkeiten  $c_{\text{Welle}}$ ,  $c_{\text{WeKon}}$ ,  $c_{\text{Verzahnung}}$  und  
 $c_{\text{Nabe}}$  eine Reihenschaltung von Federn. Eine Ver-  
einfachung wird durch die Hintereinanderschaltung  
der Steifigkeiten  $c_{\text{WeKon}}$  und  $c_{\text{Verzahnung}}$  erreicht,  
Gl.1:

$$\frac{1}{c_{K+V}} = \frac{1}{c_{\text{WeKon}}} + \frac{1}{c_{\text{Verzahnung}}} \quad (\text{Gl.1})$$

Die einzelnen tragenden Zahnpaare (n Stück) bil-  
den eine Parallelschaltung, Gl.2:

$$c_{\text{Verzahnung}} = \sum_{i=1}^n c_i \quad (\text{Gl.2})$$

Unter der Voraussetzung, dass der Nabenaußen-  
durchmesser  $d_{e2}$  deutlich größer als der maßge-  
bende Bezugsdurchmesser  $d_B$  der Welle ist  
( $d_{e2} \geq 2 \cdot d_B$ ; z.B. /2/), kann die Nabe als unendlich  
steif angenommen werden ( $c_{\text{Nabe}} \rightarrow \infty$ ), wodurch  
sich die Gesamtsteifigkeit  $c_{\text{ges}}$  berechnen lässt,  
Gl.3:

$$\frac{1}{c_{\text{ges}}} = \frac{1}{c_{\text{Welle}}} + \frac{1}{c_{K+V}} + \frac{1}{c_{\text{Nabe}}} \quad (\text{Gl.3})$$

bzw.

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c_{Welle}} + \frac{1}{c_{WeKon}} + \frac{1}{c_{Verzahnung}} \quad (\text{Gl.4})$$

Damit kann die gesamte Passverzahnung als Bestandteil des Antriebsstrangs durch die Bewegungsgleichung eines Ein-Massen-Schwingers mit der Gesamtsteifigkeit  $c_{ges}$  beschrieben werden. Unter Anwendung entsprechender Simulationssoftware (FEM- und MKS-Programme) kann der Konstrukteur oder Berechner überprüfen, ob die Komponenten im Bereich der Eigenfrequenz des Systems betrieben werden oder nicht. Die Terme der Gl.3 bzw. Gl.4 bilden dabei die vom Konstrukteur direkt beeinflussbaren Größen, um eine gezielte Verschiebung der Resonanzfrequenz in höhere Drehzahlbereiche zu ermöglichen. Charakteristisches Merkmal einer Reihenschaltung von Federn ist die Tatsache, dass die Einzelsteifigkeiten stets größer als die Gesamtsteifigkeit sind. Diese Plausibilitätsbedingung ist bei der Berechnung stets zu überprüfen.

### 3 Rechengang

#### 3.1 Steifigkeit der Welle im Bereich ungestörter Torsion ( $c_{Welle}$ )

Die Steifigkeit des frei überstehenden Wellenstücks  $c_{Welle}$  vor dem Verbindungsbeginn (Gl.5) lässt sich entweder über Finite-Elemente-Analysen durch Auswertung des Verdrehwinkels oder über die Berechnung des Winkels (Gl.6) ermitteln. In diesem Fall ist jedoch die Kenntnis des Torsionsflächenmoment  $I_t$  des zylindrischen Ersatzquerschnitts der Welle mit dem Ersatzaußendurchmesser  $d_h$  Voraussetzung /2/:

$$c_{Welle} = \frac{T}{\hat{\alpha}} \quad (\text{Gl.5})$$

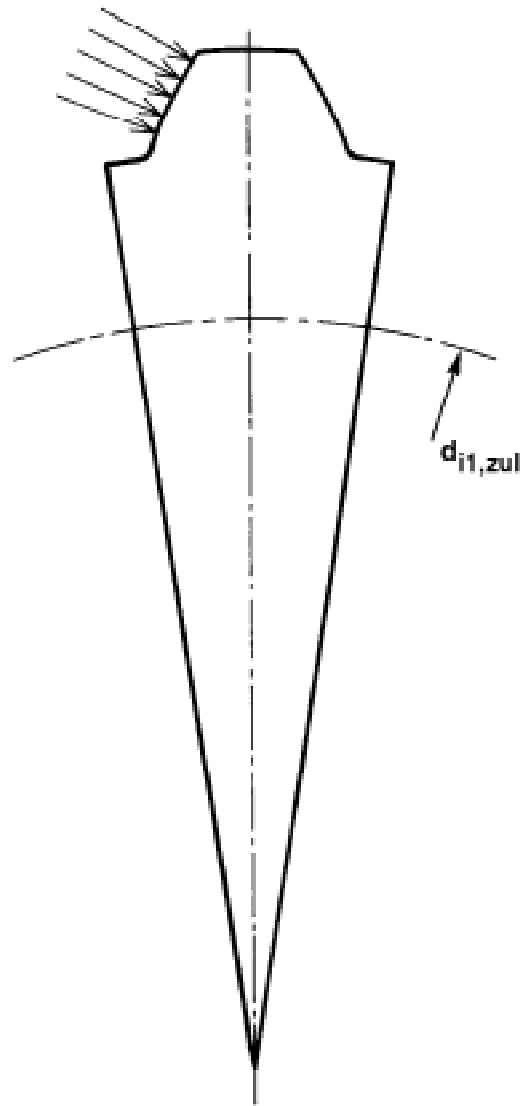
$$\hat{\alpha} = \frac{T \cdot l \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot (d_h^4 - d_i^4)} \quad (\text{Gl.6})$$

#### 3.2 Steifigkeit der Wellengrundkörper und der Verzahnung im Kontaktbereich ( $c_{K+V}$ )

Die Verdrehwinkeldifferenz  $\Delta\alpha_{K+V}$  zwischen einem Punkt am Außendurchmesser der Nabe und einem Punkt des Wellengrundkörpers, der auf einem Radius liegt, der kleiner ist als der Grenzinradius für die Gültigkeit der Dimensionierungsgleichungen für Passverzahnungen (**Bild 1**; /2, 3/), resultiert aus den elastischen Eigenschaften des Wellen-

grundkörpers am Verbindungsbeginn und der tragenden Zahnpaare. Die Teilsteifigkeit  $c_{K+V}$  wird durch Gl.7 berechnet:

$$c_{K+V} = \frac{T}{\Delta\hat{\alpha}_{K+V}} \quad (\text{Gl.7})$$



**Bild 1:** Wellensektor einer Passverzahnung mit zulässigem Innendurchmesser

Die Ermittlung der Steifigkeit des Wellengrundkörpers  $c_{WeKon}$  aus FEM-Berechnungen gelingt durch Differenzbildung aus den Verdrehwinkelwerten am zulässigen Welleninnendurchmesser  $d_{i1,zul}$  am Verbindungsbeginn und -ende /2, 3/ unter analoger Anwendung der Gl.7.

Nach dieser Vorgehensweise könnte man auch die Steifigkeit der Verzahnung  $c_{Verzahnung}$  bestimmen. Wesentlich eleganter ist aber die Umstellung von Gl.1 nach der gesuchten Größe, da die beiden anderen Terme schon bekannt sind.

### 1.3 Steifigkeit der gesamten Passverzahnungsverbindung ( $c_{ges}$ )

Durch Einsetzen der berechneten Teilsteifigkeiten in Gl.1 oder durch Auswertung des Last-Verdrehwinkel-Zusammenhangs zwischen Drehmomenteinleitungs- und Drehmomentweiterleitungsort in einer FEM-Rechnung gelangt man zur Steifigkeit der Gesamtverbindung  $c_{ges}$ .

Mit diesen einfachen Überlegungen und Gleichungen ist es sehr einfach möglich, die für eine schwingungsdynamische Untersuchung mit einer Mehrkörpersimulationssoftware notwendigen Eingangsgrößen zu bestimmen.

## 4 Berechnungsbeispiel

Die Umsetzung der Modellbildung soll am Beispiel einer Zahnwellen-Verbindung mit Evolventenflanken nach DIN 5480 – 60x1x30x58 dargestellt werden.

Verzahnungsdaten:

Drehmoment:	$T=470$ Nm
Durchmesser der zyl. Ersatzwelle:	$d_{h1}=58,2$ mm
Welleninnendurchmesser:	$d_{i1}=0$ mm
Elastizitätsmodul:	$E=210000$ MPa
Querkontraktionszahl:	$\nu=0,3$
Freie Wellenlänge:	$l=90$ mm
Gemeinsame Verbindungsbreite:	$b=36$ mm
Nabenaußendurchmesser:	$d_{e2}=180$ mm

Die zur Berechnung der Teilsteifigkeiten erforderlichen Verdrehwinkel(-differenzen) wurden aus einer FE-Berechnungen unter elastischem Materialverhalten ermittelt. Die Verzahnung wurde dabei geometrisch ideal abgebildet, d.h. es wurden keine Verzahnungsfehler in Form von Teilungs- und Zahndickenabweichungen an Welle und Nabe berücksichtigt. Dies impliziert ein identisches Trag- und Belastungsverhalten aller Zahnpaare über dem Verbindungsumfang.

Berechnungsergebnisse:

$c_{Welle}=1.011.000$ Nm/rad
$c_{K+V}=6.866.400$ Nm/rad
$c_{WeKon}=8.497.200$ Nm/rad
$c_{Verzahnung}=35.075.000$ Nm/rad (gesamte Verzahnung mit 58 Zähnen)
(ein Zahnpaar: $c_{1Zahnpaar}=605.000$ Nm/rad)
$c_{ges}=880.800$ Nm/rad

Das in Kap.2 genannte Plausibilitätskriterium wird eingehalten.

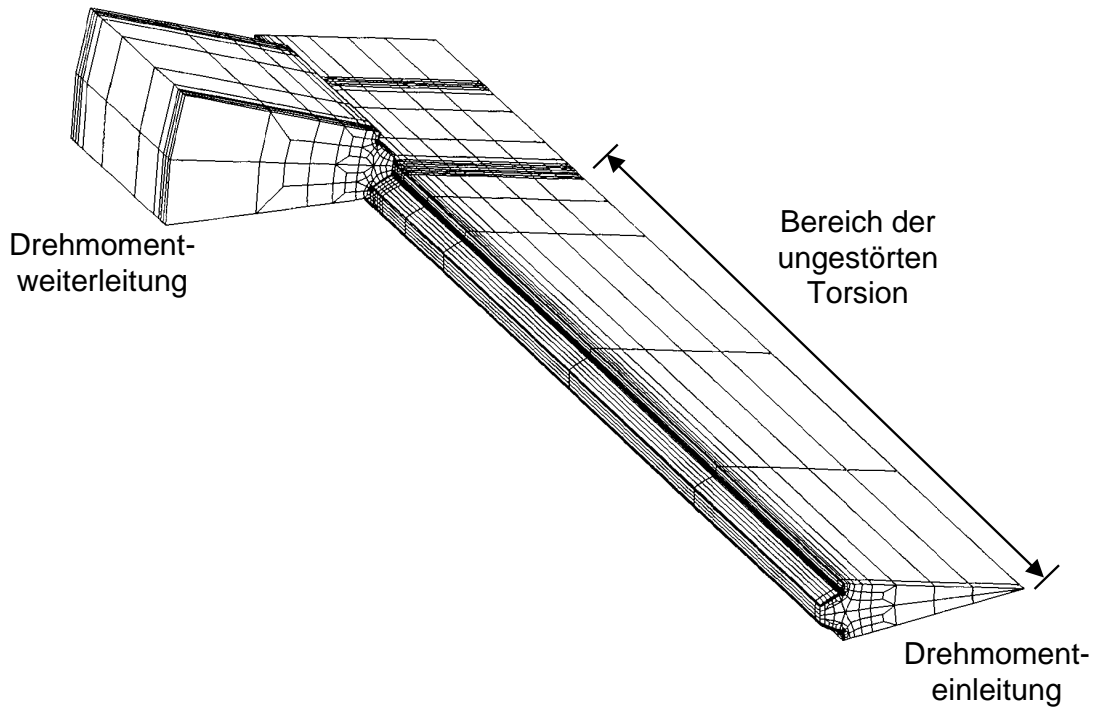
## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Mit der beschriebenen Modellbildung und der Analyse der Beeinflussbarkeit der entsprechenden Teilsteifigkeiten durch die Verzahnungsgeometrie konnte einem mittelständischem Getriebehersteller bei der Verbesserung einer Antriebslösung entscheidend weitergeholfen werden, da durch den empfohlenen Wechsel des Moduls der Passverzahnung der vormals eigenfrequente Betriebspunkt in einen unterkritischen Bereich verschoben wurde. Die Änderung der Verzahnungsdaten inkl. der Neufertigung der Passverzahnung verhinderte hier kostspielige sekundäre Lärminderungsmaßnahmen und evtl. eine Produkthaftung bei einem nicht auszuschließendem Schadensfall.

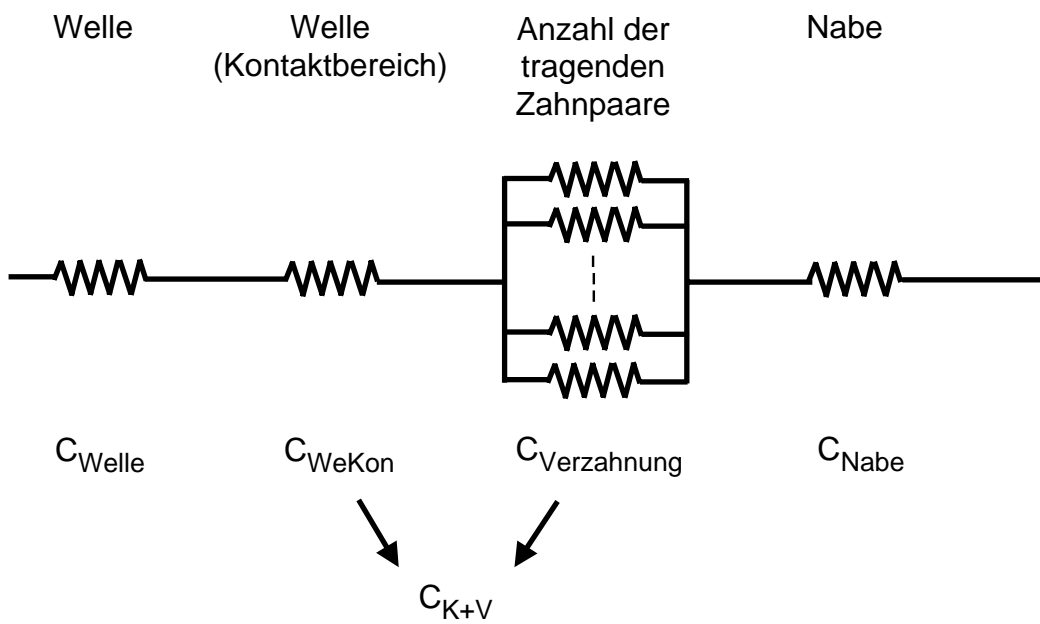
Die Erweiterung des Modells hinsichtlich der Berücksichtigung von Dämpfungsgliedern (z.B. Öl- oder Fettschmierung der Verzahnung) und/oder der Einbeziehung von Verzahnungsfehlern (Teilungs- und Zahndickenabweichungen an Welle und Nabe) ist problemlos möglich. Durch den zweitgenannten Gesichtspunkt wird das Tragverhalten der Zahnpaare über dem Verbindungsumfang lastabhängig, d.h. der Verdrehwinkel des Antriebsstranges wird durch das elastische Verhalten der drehmomentabhängigen Anzahl im Eingriff befindlicher Zahnpaare bestimmt. Damit wäre die Gesamtsteifigkeit und der Resonanzpunkt des Systems belastungsabhängig. Diese erhöhte Modellkomplexität würde eingehendere Analysen und ein vertieftes Anwenderverständnis der Verzahnungs kinematik und der Mechanik erfordern, um zweifelsfreie Aussagen zum Systemverhalten zu garantieren.

## 6 Literatur

- /1/ Garzke, M.; Schäfer, G.: Die Zahnwellenforschung im Wandel der Zeit. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.h.c. Dr.-Ing. Peter Dietz, Institut für Maschinenwesen, TU Clausthal, Mai 1999
- /2/ Wesolowski, K.: Dreidimensionale Beanspruchungszustände und Festigkeitsnachweis drehmomentbelasteter Zahnwellen-Verbindungen unter elastischer und teilplastischer Verformung. Dissertation TU Clausthal 1996
- /3/ DIN 5466E Tragfähigkeitsberechnung von Zahn- und Keilwellen-Verbindungen (Teil 1 und 2). DIN 1999



**Bild 2:** Sektormodell einer Passverzahnung mit Bezeichnungen



**Bild 3:** Unterteilung der Passverzahnung in Teilsteiigkeitssysteme