Auswertungsmethoden und Analyse der Zuverlässigkeit von Mess- und Informationsanlagen

Khurodze, R.

Die Entwicklung der modernen Mittel für die Sammlung, Umwandlung, Verarbeitung und Übertragung von Daten bietet auf Grund der billigen, kompakten, schnellen und energiesparenden Integralmikroschaltungen die Möglichkeit sehr komplizierte automatisierte Systeme zur Steuerung von Betriebsvorgängen (ASS BV) praktisch zu verwirklichen. Das Problem der ausreichenden Zuverlässigkeit von angebotenen ASS BV ist jedoch bisher noch nicht endgültig gelöst. Deshalb ist die Auswertung und Analyse der Zuverlässigkeit von Mess- und Informationssystemen eine sehr wichtige Aufgabe.

1 Einleitung

Man kann die Steuerungssysteme in drei Klassen je nach Nutzungsbedingungen, vor allem nach der Möglichkeit der Wiederherstellung am Betriebsort, einteilen.

a) Die Steuerungssysteme (SS), die man in bestimmten Zeiträumen nicht stoppen und im Laufe des Betriebs nicht wiederherstellen darf.

b) Die Steuerungssysteme, bei denen die Unterbrechung des Betriebs für die Wiederherstellung zulässig ist.

c) Die Steuerungssysteme, bei denen Reparaturarbeiten ohne Unterbrechung des üblichen Betriebs zulässig sind.

Das quantitative Maß für die Zuverlässigkeit der Analoganlagen ist die Wahrscheinlichkeit des Betriebs ohne zu versagen und mit den Fehlern in zulässigen Grenzen zu bleiben[8].

In diesem Beitrag werden die Aufgaben der Analyse der Gesamtzuverlässigkeit von technischen Komponenten in ASS BV erörtert. Insbesondere werden zwei Modelle zur Gestaltung, Sammlung, Umwandlung und Verarbeitung von Analog-Messdaten in ASS BV betrachtet mit Verwendung: 1) der EDV ohne Strukturreserven; 2) der Analog-EDV <u>mit Reserven</u>.*

*

2 Das I. Modell

In einer Anlage zur Messung, Umwandlung und Verarbeitung von Meßdaten in Digitalform gibt es eine eingebaute Kontrollapparatur, die ein Versagen jeder Art mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als 1 erkennen kann. In dieser Anlage können unterschiedliche Ausfälle auftreten: 1) die unvermuteten Ausfälle, die durch das System der Kontrollapparatur im Zeitpunkt der Entstehung erkannt werden können; 2) die von der Kontrollapparatur nicht erkennbaren unvermuteten Ausfälle; 3) erkennbare parametrische (sukzessive) Ausfälle; die Laplace-Transformation der Verteilungsdichte von Zeiträumen zwischen aufeinanderfolgenden sukzessiven Versagen $a_{(s)}$ kann durch parallel-sukzessive Phasen (Schritte) dargestellt werden* [1,3,4]:

Formel (1) im Anhang

hierin ist n - die Anzahl der parallelen Zweige; jeder Zweig besteht aus l_i (i=1,n) sukzessiven Phasen; a_{ij} (i - die Zweignummer, j - die Nummer des Schrittes im i-ten Zweig) - die Intensität des entstehenden Versagens; P_i - die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens eines Versagens der ersten Phase des i-ten Zweiges nach der Wiederherstellung der aus-

* Zur Erzielung einer erforderlichen Sicherheit des mathematischen Modells ist es erwünscht und manchmal sogar auch nötig, die parametrischen Ausfälle nicht durch ein bestimmtes, sondern durch ein frei ausgewähltes Verteilungsgesetz zu beschreiben. Aber in diesen Fällen entstehen mathematische Schwierigkeiten. Deshalb ist es meist zweckmässiger eine bekannte effektive Methode zur Approximation der verschiedenen Verteilungsgesetze (darunter auch des Gaussgesetzes) mit parallel-sukzessiven Phasen zu verwenden. Diese Methode gewährleistet die Berechnung von erforderlichen Werten des Variationskoeffizients mit beliebiger Präzision.

gefallenen Anlage; $\eta(t) = (i,j)$ - der Anlagenzustand nach dem Versagen.

Für die Erkennung von Ausfällen, die durch die Kontrollapparatur nicht erkennbar sind, ist eine periodische sichere Testkontrolle vorgesehen [5-7,9]. Sofort nach dem Erkennen des Versagens setzt die Wiederherstellung der Anlage ein, um ihre Anfangszuverlässigkeit wiederherzustellen. Im Laufe der Wiederherstellung entstehen keine neuen Versagen.

Wir beschreiben den Arbeitsvorgang des Systems als Zufallsprozess $\nu(t)$. Wenn im Zeitpunkt t das System arbeitsfähig und im Betriebszustand ist, so ist $\nu(t)=1$. Wenn das System sich im Betriebszustand befindet, aber nicht arbeitsfähig ist, so ist $\nu(t)=2$. $\nu(t)=3$ - das System ist arbeitsfähig und wird der periodischen Prüfung unterworfen; $\nu(t)=4$ - das System ist nicht arbeitsfähig und befindet sich im Zustand der Wiederherstellung. Wir definieren den Zufallsprozess wie folgend: $\varepsilon(t)$ - der Zeitraum vom letzten 0-Zeitpunkt bis zum t-Zeitpunkt. Der 0-Zeitpunkt ist ein Zeitpunkt des Wertwechsels der Funktion $\nu(t)$; $\eta(t) = (i,j)$ - der Zustand des Systems im t-Zeitpunkt nach dem entstehenden parametrischen Versagen.

Die Bezeichnungen werden wie folgt benutzt:

γ - die Intensität unvermuteter Versagen, die durch laufende Gerätekontrolle erkennbar sind; β - die Intensität unvermuteter Versagen, die durch periodische Kontrolle oder im Laufe der Wiederherstellung erkennbar sind; ν - die Pauschalintensität von Versagen, die im Laufe der periodischen Kontrolle entstehen und bis zum Ende dieser Kontrolle erkannt werden; G(u) - die Verteilungsfunktion (VF) der Wiederherstellungszeit;

$$m(u) = G'(u)/\overline{G}(u), \overline{G}(u) = l - G(u) \;;$$

$\Gamma(u)$ - die VF von Zeiträumen der periodischen Kontrolle $b(u)=\Gamma(u)/\Gamma(u), \Gamma(u)=1-\Gamma(u)$; F(u) - die VF von Zeiträumen, wenn sich das System im Zustand $\nu(t)=1$ befindet und es bis zum Anfang der periodischen Kontrolle nicht versagt;

$$c(u) = F'(u)/\overline{F}(u), \overline{F}(u) = 1 - F(u).$$

Es ist offensichtlich, daß einige der statistischen Ausgangswerte sich je nach dem Systemzustand unterscheiden können. Z.B. α_{ij} - im Betriebszustand vom $\alpha_{i^\circ j}$ - im Zustand der periodischen Kontrolle.

Für die Beschreibung des Betriebsvorganges eines Systems werden folgende Wahrscheinlichkeiten benutzt:

$$t_{ij}(t,u)du = P\{v(t)=1, h(t)=(ij), u<e(t)<u+du\}$$

$$t_{ij}(t,u)du = P\{v(t)=2, h(t)=(ij), u<e(t)<u+du\}$$

$$q_{ij}(t,u)du = P\{v(t)=3, h(t)=(ij), u<e(t)<u+du\};$$

$$q^{*}_{ij}(t,u)du = P\{v(t)=4, h(t)=(ij), u<e(t)<u+du\};$$

$$r(t,u)du = P\{v(t)=5, u<e(t)<u+du\}.$$

Wenn im Anfangszeitpunkt das System im arbeitsfähigen Zustand und nach dem parametrischen Versagen im (i, j)-Zustand ist, so ist

$$t_{ij}(0,0) = d_{i} d_{j} d(t)$$

Hierbei ist $\delta(t)$ - die Impulsfunktion; δ_{ij} - das Kronekerzeichen.

Für die Grenzbedingungen (u=0) kann man in bezug auf die eingeführten Wahrscheinlichkeiten folgende Verhältnisse ableiten:

Formeln (2-6) im Anhang

Ausgehend von wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen sind folgende Formeln begründet:

Formeln (7-12) im Anhang

Die Formel (12) stellt die Wahrscheinlichkeit des Übergangs vom System, daß sich im Zeitpunkt u=0 nach dem Entstehen des Versagens im (iK)-Zeitpunkt befindet, im (0,u)-Zeitraum in den (ij)-Zustand $(i=\overline{1,n}, K=\overline{1,l_i})$ dar.

Die Formeln (7)-(11) beschreiben die Unbekannten $\tau_{iK}(t,0)$, $\tau^{*}_{iK}(t,0)$, $q_{iK}(t,0)$ $q^{*}_{iK}(t,0)$ und r(t,0). Diese Grössen werden durch die Gleichungen der Grenzbedingungen bestimmt.

Wenn man die Formeln (7)-(11) in (2)-(6) substituiert und die Laplace-Transformation benutzt, so ergibt sich:

Formeln (13-17) im Anhang

Hier:

$t_{cd}(s,0) = t_{cd}(t,0); t^*_{cd}(s,0) = t^*_{\wedge cd}(s,0); q_{cd}(s,0 = q_{cd}(t,0)$

$$q^*_{cd}(s,0) = q^*_{cd}(t,0); r_{cd}(s,0) = r_{cd}(t,0) \;;$$

= Zeichen der Laplace-Transformation.

Formeln (18-28) im Anhang

Auf diese Weise entsteht ein System von algebraischen linearen Gleichungen für $t_{ij}(s,0)$ $(i = 1, n, i = 1, l_i)$.

Die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten beträgt: $\sum_{i=1}^{n} l_i$.

Die Lösung des Systems (28) unter Berücksichtigung der Formel (27) gibt die Möglichkeit $t_{ij}(s,0)$ $(i = 1, n, i = 1, l_i)$ und daraus alle vorher eingeführten Wahrscheinlichkeiten festzustellen.

Das Normierungsverhältnis in Form der Laplace-Transformation:

Formel (29) im Anhang

Die stationären Werte für die betroffenen Wahrscheinlichkeiten werden üblicherweise wie folgt bestimmt:

$$t_{ij}(0) = \lim_{s\to 0} s t_{ij}(s,0); t_{ij}(u) = \lim_{s\to 0} s t_{ij}(s,u) =$$

$$= \sum_{K=1}^{j} t_{iK}(0)\overline{F}(u) l^{(ij)}_{iK}(u) e^{-(b+g)u} \;;$$

$$t_{ij} = \lim_{s\to 0} s t_{ij}(s) = \sum_{K=1}^{j} t_{iK}(0)\overline{F}^{(ij)}_{iK}(g+b),$$

analog dazu werden die anderen Wahrscheinlichkeiten berechnet.

Das Gleichungssystem (28) und (29) hat für $t \to \infty$ die Form:

Formel (30) im Anhang

Es ist leicht zu beweisen, daß.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} t_{ij}(0) = 0$$

Daher ist die Anzahl der unabhängigen Gleichungen eins weniger als die Anzahl von Unbekannten.

Als fehlende Gleichung ist die Normierungsgleichung für den stationären Zustand zu benutzen:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} (t_{ij} + t^*_{ij} + q_{ij} + q^*_{ij}) + r = 1$$

Hier

$$r(0) = \lim_{s\to 0} sr(s,0); r = \lim_{s\to 0} sr(s) = \lim_{s\to 0} r(0)\frac{1-g(s)}{s} = t_b r(0)$$

t_b - die mathematische Wartezeit bis zur Wiederherstellung der versagten Anlage.

Es ist klar, daß der Koeffizient der Betriebsbereitschaft folgende Form hat:

$$K_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} t_{ij} \,.$$

Ferner betrachten wir die Auswertemethoden zur Zuverlässigkeit der Gesamt-Messanlage (KMA), d.h. mehrere primäre Meßanlagen zur Messung einer Bezugsgrösse werden zu einem Komplex, mit dem Ziel der Erhöhung der Genauigkeit und Zuverlässigkeit zusammengeschlossen.

Es gibt zwei Möglichkeiten zum Aufbau von KMA. Die erste: die Meßdaten werden automatisch nach einem bestimmten Algorithmus mit der Hilfe von EDVA verarbeitet. Bei der zweiten Möglichkeit für die Verarbeitung von Meßdaten wird die Analogtechnik eingesetzt.

In diesem Beitrag werden nur die Verfahren der Verarbeitung von Meßdaten in Analogform und die Reserven zur Sicherung bei unvermutetem Versagen behandelt.

Es gibt mehrere Algorithmen zur Verarbeitung von Meßdaten und Erhöhung ihrer Zuverlässigkeit und Genauigkeit. Die Verarbeitung der Angaben von Bestandteilen der KMA nach dem linearen (ziemlich einfachen) Algorithmus gewährleistet die erforderliche Zuverlässigkeit und Genauigkeit der Messdaten bei Versagen der einzelnen Meßanlagen nicht. Der nichtlineare Algorithmus kann die erforderliche Zuverlässigkeit und Genauigkeit sichern, aber er erfordert die Verwendung von EDVA oder besonderen technischen Mitteln (die Geräte zur Wiederherstellung der Daten). Die wesentliche Erhöhung der Zuverlässigkeit wird durch die Verwendung (im Rahmen des Algorithmus der Verarbeitung von Messdaten) logischer Operation erreicht, die die Angaben von Meßanlagen vergleichen und die stark abweichenden Angaben weniger Anlagen ausschliessen.

Dabei ist anzunehmem, daß die ausgeschlossenen Anlagen zu den fehlerhaften Bestandteilen der KMA gehören. Diese Operation gleicht der in der Metrologie bekannten Operation, die grobe Fehler aus den Mengen von statistischen Angaben ausschliessen.

Dies sind die suboptimalen Algorithmen, die durch eine unkomplizierte Apparatur realisiert werden können.

Unter vielen Varianten von suboptimalen Algorithmen hat der Algorithmus der Medianenwahl besondere Bedeutung. Er ist bei Aufgaben zur Erhöhung der Genauigkeit und Zuverlässigkeit sehr effektiv [2]. Bei einer ungeraden Anzahl (N) von Meßanlagen sind die Medianen dem Mittelwert der Varitionsreihe gleich.

Wenn die Meßanlagen so numeriert werden, daß die Momentanwerte nach ihren Werten eine steigende Varitionsreihe bilden (die Zahl N ist ungerade):

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_{\frac{N+1}{2}} < \ldots < y_{N-1} < y_N \, ,$$

dann ist der Median der Angabe mit laufender Nummer (N+1)/2 gleich:

$$med(y_1, y_2, \ldots, y_N) = y_{\frac{N+1}{2}}$$

Damit verwirklicht der Algorithmus der Medianenwahl das Abstimmungsprinzip. Das ist beim Aufbau von KMA sehr wichtig.

3 Das 2. Modell

Nehmen wir an, daß die KMA aus funktionierenden (m) und stillstehenden (Reserve) (n-m) Messanlagen besteht (m - ungerade Zahl). Funktionierende Anlagen versagen mit der Intensität α_1, und die Reserveanlagen mit der Intensität α_2. Die ausgefallenen MA erreichen nach der Wiederherstellung die ursprüngliche Genauigkeit und Zuverlässigkeit. Die KMA wird von einer Wartungseinheit kontrolliert. Wenn eine funktionierende Anlage versagt, wird eine Reserveanlage an ihre Stelle sofort eingeschaltet. Die Umschalter werden als absolut zuverlässig angenommen. Die Wiederherstellungszeit der ausgefallenen Anlage ist nach beliebigem Gesetz verteilt.

Wenn die Anzahl von ausgefallenen Meßanlagen (MA) mehr als m wird, so versagt die betroffene KMA (das System) und sie wird nicht arbeitsfähig [8,10].

Zu jedem Zeitpunkt befinden sich m Anlagen im arbeitsfähigen Zustand. Die Anzahl der nichtarbeitsfähigen MA beträgt nicht mehr als *N= n- m*.

Führen wir folgende Bezeichnungen ein: G(u) - die Verteilungsfunktion für die Wahrscheinlichkeit (VFW) der Wiederherstellungszeit; $R_K(t)$ - die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, daß die Anzahl von nichtarbeitsfähigen Anlagen im Zeitpunkt t in einer KMA *K* beträgt *(K=0,N)*; $r_K(t,u)du$ - die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, daß die Anzahl von nichtarbeitsfähigen MA im Zeitpunkt t K beträgt. Eine Meßanlage wird im Zeitraum ζ ($u< \zeta <$ u+du) wiederhergestellt.

g(u)=G'(u); P(u)=G'(u)/[1-G(u)] ;

ai=m`7I +(i-m)a2 ;

N=n-m+1 - die Anzahl von nichtarbeitsfähigen MA, bei der das System versagt. Auf Grund des betrachteten Modells kann man als spezielle Fälle auch folgende Sondermodelle beschreiben:

1) belastete Reserve mit Ersetzung ($\alpha_1=\alpha_2$);
2) unbelastete Reserve mit Ersetzung ($\alpha_2=0$);
3) ständige Reserve ohne Ersetzung (*n=m);*
4) die Reserve ohne Wiederherstellung.

Es sind auch andere Möglichkeiten zur Reservierung möglich.

Ausgehend von den üblichen wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen über eventuelle Veränderungen von Zuständen des Systems in kleinen Zeiträumen *(t,t+h),* kann man mit Verwendung von Halb-Markow-Prozessen das folgende System der Differentialgleichungen zusammensetzen:

Formeln (31-35) im Anhang

Hierbei ist $l_i^{(j)}(u)$ - die Wahrscheinlichkeit des Ereignis, daß die KMA zum Zeitpunkt t, i nichtarbeitsfähige Anlagen umfasst und ihre Anzahl im Zeitpunkt t auf j ansteigt $(j \geq i)$:

$$l_i^{(j)}(u) = \int_0^u a_i e^{-a_i n} l_{i+1}^{(j)}(u-n)dn$$

Der wahrscheinlichkeitstheoretische Sinn der Formel (35) läßt sich wie folgt erklären. Es handelt sich hierbei um die Wahrscheinlichkeit des folgenden zusammengesetzten Ereignisses: im Zeitpunkt t-u (der Anfangsmoment der Wiederherstellung der nächstfolgenden nichtarbeitsfähigen MA) beträgt die Gesamtzahl von nichtarbeitsfähigen MA-v ($v=1,K$).

Eine solche MA wird im Zeitraum ζ $(u<\zeta<u+du)$ wiederhergestellt. In der Zeit u nahm die Anzahl von nichtarbeitsfähigen MA auf *K (K>V)* zu.

Benutzt man die Laplace-Transformation und leitet die Formeln ab:

Formeln (36-38) im Anhang

Das System der Gleichungen (38) umfaßt *N* Gleichungen und *N* Unbekannte: Ro(s), rK(s,0) (K=1,N-1). Durch die erste Gleichung des Systems (39) kann man die Formel bilden:

$$r_1(s,0)=\frac{(s+a_n)R_0(s)-1}{g_{n-1}^{(n-1)}(s)}$$

und dann substituiert man diese in die weiteren Gleichungen (38) und löst sie. Die Gleichungen mit den laufenden Nummern (N-2) werden für die Bestimmung Ro(s) benutzt.

Die Lösung des Systems (38) ist einfach und deshalb soll sie hier nicht beschrieben werden. Danach bestimmt man den Mittelwert der Betriebszeit für jedes Versagen oder den durchschnittlichen Zeitraum bis die KMA in nichtarbeitsfähigem Zustand ist. Laut (38)

$$R_N(s)=\frac{a_{n-N+1}R_{N-1}(s)}{s};$$

Da $R_N(s)=\int_0^\infty e^{-st}R_N(t)dt$ gibt es folgendes Verhältnis:

$$sR_N(s)-R_N(0)=\int_0^\infty e^{-st}R'_N(t)dt \ (R_N(0)=0)$$

$$oder \ sR_N(s)\Big|'_{s=0}=-\int_0^\infty tR'_N(t)dt.$$

Damit ist $T_{CHO}=-sR_N(s)\Big|'_{s=0}$. (´) - das Zeichen des Differentialquotienten (hier und in der Folge).

Analog kann der zweite Moment und die Dispersion ausgerechnet werden.

Die Zuverlässigkeitsindizes für ein nichtwiederherstellbares System erhält man durch das Substituieren des Wertes τ_b (die Mittelzeit der Wiederherstellung), der der Grenzwert in obengananntе Formeln gleich ist, d.h. $t_b=\int_0^\infty tg(t)=\infty$.

Dieses Verhältnis kann in Form der Laplace-Transformationen dargestellt werden, wie g(s)=0. In diesem Fall sieht das System der Gleichungen (38) so aus:

Formeln (39 ff.) im Anhang

Nachfolgend wird ein Beispiel zur Verwendung der Formeln des 2.Modell dargestellt.

Formeln (40 ff.) und Beispiele im Anhang

Diese Ergebnisse bestätigen die Korrektheit der angewendeten Verallgemeinerung von herkömmlichen Modellen zur Berechnung der Zuverlässigkeit und lässt sie selbst für die Berechnung von praktischen Systemen wichtig erscheinen. Zum Schluß soll noch betont werden, daß die Realzeit der Umschaltung von Reserveanlagen und die beschränke Zuverlässigkeit des umschaltenden Organs die Grundsätze der angegebenen Methode nicht berührt und nur betroffene Formeln und Transformationen kompliziert.

4 Literatur

/1/ R. Barlow, F. Proschan. Mathemetical theory of Reliability. New York, London, Sydney, 1964, 488 p.

/2/ D.A. Braslawskij, W.W. Petrow. Die Genauigkeit von Meßanlagen. Moskau, Maschinenbau Verlag, 1976, 311 s. (In russischer Sprache).

/3/ W.W. Gnedenko. Die Fragen der mathematischen Zuverlässigkeitstheorie. Moskau, "Radio und Fermeldewesen"-Verlag, 1983, 376 S. (In russischer Sprache).

/4/ D.R. Cox, W.L. Smith. Renewal theory. New York: John Wiley and sons inc, 1961, 299p.

/5/ I.S. Mikadze. Reliability of a monitored system. Plenum Publishing Corporation New York 1985, pp. 815-820 (Translated from Avtomatika I Telemekhanika, No. 6, pp. 160-166, 1985).

/6/ I.S. Mikadze. A Queueing System with an Unreliable served and periodic checking. Plenum publishing Corporation, New York, 1988, pp. 68-75 (Translated from "Kybernetika", No. I, pp. 56-61,1988).

/7/ K. Reinschke. Modelle zur Zuverlässigkeits- und Empfindlichkeitsanalyse von Systemen. VEB Technik Verlag, Berlin, 1974, 453 S.

/8/ R.A. Khurodse. Parametrisches Versagen von Analoggeräten und Strukturmethoden ihrer Verminderung. Hochschule für Technik, Karlsruhe, 1997, 93 S.

/9/ R.A. Khurodze, I.S. Mikadze, S.S. Natschkebia. Die Analyse der Zuverlässigkeit und Genauigkeit von Mess- und Datenanlagen. Georgian Engineering News, Tbilisi, No. 4, 1997,pp. 59-68. (In russischer Sprache).

/10/ R.A. Khurodze, I.S. Mikadze, S.S. Natschkebia. Die Methoden zur Auswertung der Zuverlässigkeit von Komplexmeßanlagen. Georgian Engineering News, Tbilisi, No. 4, 1997. (In russischer Sprache).

Anhang – Formeln und Beispiele

$$a(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i \prod_{j=1}^{l_i} a_{ij}/(s+a_{ij}) \;,\quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \tag{1}$$

$$\tau_{ij}(t,0) = \delta_{j1} P_i \int_0^t r(t,u)\mu(u)du + \int_0^t q_{ij}(t,u)b(u)du + \delta_{ii}\delta_{jj}\delta(t); \tag{2}$$

$$\tau^*_{ij}(t,0) = 0; \tag{3}$$

$$q_{ij}(t,0) = \int_0^t \tau_{ij}(t,u)c(u)du \tag{4}$$

$$q^*_{ij}(t,0) = \int_0^t \tau^*_{ij}(t,u)c(u)du \tag{5}$$

$$r(t,0) = \gamma \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} \int_0^t \left[\tau_{ij}(t,u) + \tau^*_{ij}(t,u)\right] +$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{il_i} \int_0^t \left[t_{il_i}(t,u) + t^*_{il_i}(t,u)\right] du + \sum_{i=1}^{n} a^0_{il_i} \int_0^t \left[q_{il_i}(t,u) + q^*_{il_i}(t,u)\right] du +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} \int_0^t q^*_{ij}(t,u)b(u)du;\; i = \overline{1,n},\; j = \overline{1,l_i}. \tag{6}$$

$$\tau_{ij}(t,u)=\sum_{K=1}^{j}\tau_{iK}(t-u,0)\bar{F}(u)e^{-(\beta+\gamma)u}l_{iK}^{(ij)}(u)\;; \tag{7}$$

$$\tau_{ij}^{*}(t,u)=\sum_{K=1}^{j}\tau_{ik}(t-u,0)\bar{F}(u)e^{-\gamma u}(1-e^{-\beta u})l_{iK}^{(ij)}(u)\;; \tag{8}$$

$$q_{ij}(t,u)=\sum_{K=1}^{j}q_{iK}(t-u,0)\bar{\Gamma}(u)e^{-\nu u}\tilde{l}_{iK}^{(ij)}(u)\;; \tag{9}$$

$$q_{ij}^{*}(t,u)=\sum_{K=1}^{j}q_{ik}(t-u,0)\bar{\Gamma}(u)\tilde{l}_{iK}^{(ij)}(u)(1-e^{-\nu u})+$$

$$\sum_{K=1}^{j}q_{iK}^{*}(t-u,0)\Gamma(u)l_{iK}^{(ij)}(u)\;; \tag{10}$$

$$r(t,u)=r(t-u,0)\bar{G}(u)\;;\; i=\overline{1,n},\; j=1,l_i\;; \tag{11}$$

Hier:

$$l_{iK}^{(ij)}(u)=\int_0^u\alpha_{iK}e^{-\alpha_{iK}\nu}l_{i,K+1}^{(ij)}(u-\nu)d\nu\,;\; l_{iK}^{(ij)}(u)=\int_0^u\alpha_{iK}^{0}e^{-\alpha_{iK}^{0}\nu}\tilde{l}_{i,K+1}^{(ij)}(u-\nu)d\nu \tag{12}$$

$$t_{ij}(s,0)=d_{j1}r(s,0)P\,g(s)+\sum_{K=1}^{j}q_{ik}(s,0)g_{ik}^{(ij)}(s+n)+d_{i\tilde{i}}d_{j\tilde{j}}\;; \tag{13}$$

$$t_{ij}^{*}(s,0)=0\,; \tag{14}$$

$$q_{ij}(s,0)=\sum_{m=1}^{j}t_{im}(s,0)f_{im}^{(ij)}(s+b+g)\,; \tag{15}$$

$$q_{ij}^{*}(s,0)=\sum_{m=1}^{j}t_{im}(s,0)\left[f_{im}^{(ij)}(s+g)-f_{im}^{(ij)'}(s+b+g)\right]; \tag{16}$$

$$r(s,0)=g\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\left[t_{ij}(s)+t_{ij}^{*}(s)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[a_{il_i}^{0}(q_{il_i}(s)+q_{il_i}^{*}(s))\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[a_{il_i}(t_{il_i}(s)+t_{il_i}^{*}(s))\right]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\sum_{K=1}^{j}\left[q_{iK}(s,0)(g_{iK}^{(ij)}(s)-g_{ik}^{(ij)}(s+n))+\right.$$

$$\left.+q_{iK}^{*}(s,0)g_{iK}^{(ij)}(s)\right];\; i=\overline{1,n},\; j=\overline{1,l_i}\,. \tag{17}$$

$$t_{cd}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t t_{cd}(t,u)du=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t\sum_{K=1}^{d}t_{cK}(t-u,0)\bar{F}(u)x \tag{18}$$

$$xe^{-(b+g)u}l_{cK}^{(cd)}(u)=\sum_{K=1}^{d}t_{cK}(s,0)\bar{F}_{cK}^{(cd)}(s+b+g)\;\;;$$

$$t^*_{cd}(s)=\sum_{K=1}^{d}t_{cK}(s,0)\left[\bar{F}_{cK}^{(cd)}(s+g)-\bar{F}_{cK}^{(cd)}(s+b+g)\right]. \tag{19}$$

Analog:

$$q_{cd}(s)=\sum_{K=1}^{d}q_{cK}(s,0)\bar{\Gamma}_{cK}^{(cd)}(s+n)\;\;; \tag{20}$$

$$q^*_{cd}(s)=\sum_{K=1}^{d}q_{cK}(s,0)\left[\bar{\Gamma}_{cK}^{(cd)}(s)-\bar{\Gamma}_{cK}^{(cd)}(s+n)\right]+\sum_{K=1}^{d}q^*_{cK}(s,0)\bar{\Gamma}_{cK}^{(cd)}(s)\;\;; \tag{21}$$

$$r(s)=\frac{[1-g(s)]\,r(s,0)}{s};g(s)=G'(t)\;\;; \tag{22}$$

$$f_{ik}^{(ij)}(s)=l_{iK}^{(ij)}(u)F'(u);g_{iK}^{(ij)}(s)=\tilde{l}_{iK}^{(ij)}u\bar{\Gamma}'(u);g(s)=\Gamma'(u)\;\;;$$

$$\bar{\Gamma}(s)=\frac{1-g(s)}{s};f(s)=F'(u);\bar{F}(s)=\frac{1-f(s)}{s}\;\;;$$

$$\bar{F}_{iK}^{(ij)}(s)=\bar{F}(u)l_{iK}^{(ij)}(u);\bar{\Gamma}_{iK}^{(ij)}(s)=\bar{\Gamma}(u)l_{iK}^{(ij)}(u).$$

Wenn folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$l_{ik}^{(ij)}(u)=l_{iK}^{(ij)}(s)=\frac{1}{s+a_{ij}}\prod_{c=K}^{j-1}\frac{a_{ic}}{s+a_{ic}};\tilde{l}_{ik}^{(ij)}(u)=\tilde{l}_{iK}^{(ij)}(s)=\frac{1}{s+a_{ij}^0}\prod_{c=K}^{j-1}\frac{a_{ic}^0}{s+a_{ic}^0}\;,$$

dann

$$\bar{F}_{ik}^{(ij)}(s)=\left(\prod_{c=k}^{j-1}a_{ic}\right)\left\{\left[\left(\frac{1-f(s+a_{ij})}{s+a_{ij}}\right)\prod_{c=k}^{j-1}\frac{1}{a_{ic}-a_{ij}}\right]+\right.$$

$$+\sum_{p=K}^{j-1}\left[\left(\frac{1-f(s+a_{ip})}{s+a_{ip}}\right)\frac{1}{a_{ij}-a_{ip}}\prod_{c=K}^{j-1}\frac{1}{a_{ic}-a_{ip}}\right]\Bigg\}\;; \tag{23}$$

$$f_{iK}^{(ij)}(s)=\left(\prod_{c=k}^{j-1}a_{ic}\right)\left\{\left[f(s+a_{ij})\prod_{c=K}^{j-1}\frac{1}{a_{ic}-a_{ij}}\right]+\sum_{p=K}^{j-1}\left[\frac{f(s+a_{ip})}{a_{ij}-a_{ip}}\prod_{\substack{c=K\\ c\neq p}}^{j-1}\frac{1}{a_{ic}-a_{ip}}\right]\right\}; \tag{24}$$

$$\overline{\Gamma}_{iK}^{(ij)}(s)=\left(\prod_{c=k}^{j-1}a_{ic}^{0}\right)\left\{\left[\left(\frac{1-g(s+a_{ij}^{0})}{s+a_{ij}^{0}}\right)\prod_{c=k}^{j-1}\frac{1}{a_{ic}^{0}-a_{ij}^{0}}\right]+\right.$$

$$+\sum_{p=K}^{j-1}\left[\left(\frac{1-g(s+a_{ip}^{0})}{s+a_{ip}^{0}}\right)\frac{1}{a_{ij}^{0}-a_{ip}^{0}}\prod_{c=K}^{j-1}\frac{1}{a_{ic}^{0}-a_{ip}^{0}}\right]\Bigg\}\;; \tag{25}$$

$$g_{iK}^{(ij)}(s)=\left(\prod_{c=k}^{j-1}a_{ic}^{0}\right)\left\{\left[g(s+a_{ij}^{0})\prod_{c=k}^{j-1}\frac{1}{a_{ic}^{0}-a_{ij}^{0}}\right]+\sum_{p=K}^{j-1}\left[\frac{g(s+a_{ip}^{0})}{a_{ij}^{0}-a_{ip}^{0}}\prod_{c=K}^{j-1}\frac{1}{a_{ic}^{0}-a_{ip}^{0}}\right]\right\}\;; \tag{26}$$

Nach der unkomplizierten Transformation der Gleichungen (13) und (14) erhält man:

$$r(s,0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{l_i}\sum_{m=1}^{K}\left\{\left[g\overline{F}_{im}^{(iK)}(s+g)+a_{il_i}^{0}\overline{\Gamma}_{iK}^{(il_i)}(s)f_{im}^{(iK)}(s+g)\right]t_{im}(s,0)+\right.$$

$$\left.+\sum_{c=1}^{m}\left[g_{im}^{(iK)}(s)\,f_{ic}^{(im)}(s+g)-g_{ic}^{(im)}(s+g)-g_{im}^{(iK)}(s+n)\,f_{ic}^{(im)}(s+b+g)\right]t_{ic}(s,0)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{l_i}\left[a_{il_i}\overline{F}_{im}^{(il_i)}(s+g)t_{im}(s,0)\right]\;; \tag{27}$$

$$t_{ij}(s,0)=d_{j1}r(s,0)g(s)P_i+\sum_{K=1}^{j}\left[g_{iK}^{(ij)}(s+n)\sum_{m=1}^{K}f_{im}^{(iK)}(s+b*g)t_{im}(s,0)+d_{i\tilde{i}}d_{\tilde{j}j}\right]\;; \tag{28}$$

$$i=1,n, i=1,l_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\left[t_{ij}(s)+t^{*}_{ij}(s)+q_{ij}(s)+q^{*}_{ij}(s)\right]+r(s)=\frac{1}{s} \tag{29}$$

$$t_{ij}(0)=d_{j1}r(0)P_i+\sum_{K=1}^{j}\left[g^{(ij)}_{iK}(n)\sum_{m=1}^{K}f^{(iK)}_{im}(b+g)t_{im}(0)\right], i=\overline{1,n}, i=\overline{1,l_i} \tag{30}$$

$$R'_0(t)=-a_nR_0(t)+\int_0^t r_i(t,u)m(u)du \quad ; \tag{31}$$

$$\frac{\partial r_K(t,u)}{\partial t}+\frac{\partial r_K(t,u)}{\partial u}=-(a_{n-k}+m(u))r_k(t,u)+(1-d_{1K})a_{n-K+1}r_{K-1}(t,u)\,, \tag{32}$$

$$K=\overline{1,N-1}\ ;$$

$$R'_N(t)=a_{n-N+1}R_{N-1}(t)\,; \tag{33}$$

Das Normierungsverhältnis sieht wie folgt aus:

$$\sum_{K=0}^{N}R_K(t)=1\ .$$

Hier:

$$R_K(t)=\int_0^t r_k(t,u)du, K=\overline{1,N}\ ;$$

$$\lim_{t\to\infty}R_K(t)=0\ ,\ K=\overline{0,N-1}\ ,\ \lim_{t\to\infty}R_N(t)=1\ .$$

Die Grenzbedingungen:

$$r_1(t,0)=a_nR_0(t)+\int_0^t r_2(t,u)m(u)du\ ;$$

$$r_K(t,0)=\int_0^t r_{K+1}(t,u)m(u)du, K=\overline{2,N-2}\ ;$$

$$r_{N-1}(t,0)=0; r_N(t,0)=0 \tag{34}$$

Es seien im Anfangsmoment sämtliche MA arbeitsfähig, d.h.

$$R_0(0) = 1; R_K(0) = 0, K \neq 0\,.$$

Die Lösung des Systems (33) sieht folgendermaßen aus:

$$r_k(t,u) = \sum_{n=1}^{K} r_n(t-u,0)\overline{G}(u) I_{n-n}^{(n-K)}(u), K = \overline{1,N-1}\,. \tag{35}$$

$$R_K(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t r_K(t,u)du = \sum_{n=1}^{K} \overline{G}_{n-n}^{(n-K)}(s) r_n(s,0), K = \overline{1,N-1} \tag{36}$$

$$R_{N-1}(s) = \sum_{n=1}^{N-1} \overline{G}_{n-n}^{(n-N+1)}(s) r_n(s,0)$$

$$sR_N(s) = a_{n-N+1} R_{N-1}(s) \tag{37}$$

Hier:

$$\overline{G}(s) = \frac{1-g(s)}{s}; I_b^{(c)}(s) = \frac{1}{s+a_c} \prod_{h=c+1}^{b} \frac{a_h}{s+a_h};$$

$$\overline{G}(u) I_b^{(c)}(u) = \overline{G}_b^{(c)}(s) = \left(\prod_{h=c+1}^{b} a_h\right)\left\{\left(\frac{1-g(s+a_c)}{s+a_c} \prod_{h=c+1}^{b} \frac{1}{a_h - a_c}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=c+1}^{b} \left[\frac{1-g(s+a_p)}{(s+a_p)(a_c - a_p)} \prod_{\substack{h=c+1 \\ h \neq p}}^{b} \frac{1}{a_h - a_p}\right]\right\};$$

$$g(t) = g(s)\,.$$

Das Normierungsverhältnis in Form der Laplace-Transformationen:

$$\sum_{K=0}^{N} R_K(s) = \frac{1}{s}$$

Wenn man die Formel (35) in (31) und in das System (34) substituiert und die Laplace-Transformationen anwendet, erhält man:

$$\begin{cases} sR_0(s) - 1 = -a_n R_0(s) + g_{n-1}^{(n-1)}(s) r_1(s,0); \\ r_1(s,0) = a_n R_0(s) + \sum_{n=1}^{2} g_{n-n}^{(n-2)}(s) r_n(s,0); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_k(s,0) = \sum_{n=1}^{K+1} g_{n-n}^{(n-K-1)}(s) r_n(s,0), K = \overline{2, N-2}; \\ r_{N-1}(s,0) = 0 \\ R_N(s) = \dfrac{a_{n-N+1} R_{N-1}(s)}{s} \end{cases} \tag{38}$$

Hier

$$G'(u) I_b^{(c)}(u) = g_b^{(c)}(s) = \left(\prod_{h=c+1}^{b} a_h\right) \left[\frac{g(s + a_c)}{\prod_{h=c+1}^{b} (a_h - a_c)} + \sum_{p=c+1}^{b} \frac{g(s + a_p)}{a_c - a_p} \prod_{\substack{h=c+1 \\ h \neq p}}^{b} \frac{1}{a_h - a_p} \right].$$

$$\begin{cases} sR_0(s) - 1 = -a_n R_0(s); \\ r_1(s,0) = a_n (R_0(s); \\ r_K(s,0) = 0, K = (\overline{2, N-1}); \\ R_K(s) = \tilde{\tilde{G}}_{n-1}^{(n-K)}(s) r_1(s,0), K = \overline{1, N-1}; \\ sR_N(s) = a_{n-N+1} R_{N-1}(s); \end{cases} \tag{39}$$

Hier:

$$\tilde{\tilde{G}}_b^{(c)}(s) = \left(\prod_{h=c+1}^{b} a_h\right) \left\{ \left(\frac{1}{s + a_c} \prod_{h=c+1}^{b} \frac{1}{a_h - a_c} \right) + \sum_{p=c+1}^{b} \left[\frac{1}{(s + a_p)(a_c - a_p)} \prod_{\substack{h=c+1 \\ h \neq p}}^{b} \frac{1}{a_h - a_p} \right] \right\}.$$

Die mittlere Betriebszeit bis zu einem Versagen kann wie folgend ausgerechnet werden:

$$T_{CHO} = \left| -sR_N(s) \right|'_{s=0} = -a_{n-N+1} R'_{N-1}(0) \ ;$$

$$R'_{N-1} = r'_1(0{,}0) \overline{G}_{n-1}^{(n-N+1)}(0) + \left| \overline{G}_{n-1}^{(n-N+1)}(s) \right|'_{s=0} r_1(0{,}0) \ ;$$

$$r'_1(0{,}0) = -1 / a_n ; r_1(0{,}0) = 1 ;$$

$$\overline{G}_{n-1}^{(n-N+1)}(0)=\left(\prod_{h=n-N+2}^{n-1}a_h\right)\left\{\left(\frac{1}{a_{n-N+1}}\prod_{h=n-N+2}^{n-1}\frac{1}{a_h-a_{n-N+1}}\right)+\right.$$

$$\left.\sum_{p=n-N+2}^{n-1}\left[\frac{1}{a_p(a_{n-N+1}-a_p)}\prod_{\substack{h=n-N+2\\h\neq p}}^{n-1}\frac{1}{a_h-a_p}\right]\right\}.$$

Es sei $n=3$; $m=2$; $N=n-m+1=2$.

$$\begin{cases} sR_0(s)-1=-a_3R_0(s)+g(s+a_2)r_1(s,0); \\ r_1(s,0)=a_3R_0(s); \end{cases} \tag{40}$$

$$r_2(t,0)=0; r_2(t,u)=0; a_2=2a_1; a_3=2a_1+a_2$$

Als Lösung des Systems (41):

$$R_0(s)=\frac{1}{s+a_3(1-g(s+a_2))};\ R_1(s)=\frac{1-g(s+a_2)}{s+a_2}\frac{a_3}{s+a_3(1-g(s+a_2))}\ ;$$

$$R_2(s)=\frac{a_2R_1(s)}{s};\ R_0(s)+R_1(s)+R_2(s)=\frac{1}{s}$$

Betrachten wir einige spezielle Fälle. a) Es sei die Wiederherstellungszeit der ausgefallenen MA nach dem Exponentialgesetz verteilt, d.h.

$$G(t)=1-\exp(-mt), g(s)=\frac{m}{s+m}\ .$$

Nach der Substitution und einfachen Transformation:

$$R_0(s)=\frac{s+m+a_2}{s^2+(a_2+a_3+m)s+a_2a_3}; r_1(s,0)=a_3R_0(s)\ ;$$

$$R_1(s)=\frac{a_3}{s^2+(a_2+a_3+m)s+a_2a_3}\ ;\ R_2(s)=\frac{a_2a_3}{s(s^2+(a_2+a_3+m)s+a_2a_3)}\ .$$

Nach der Rücktransformation nach Laplace:

$$R_2(t)=1+A_2e^{s_1t}+A_3e^{s_2t}$$

Hier s1 und s2 - die Radizes der Gleichung ;

$$s^2 + (a_2 + a_3 + m)s + a_2 a_3 = 0$$

$$A_2 = \frac{a_2 a_3}{s_1^{\,2} - a_2 a_1} \;;\; A_3 = \frac{a_2 a_3}{s_2^{\,2} - a_2 a_3} \;;\; T_{CHO} = \int_0^\infty (1 - R_2(t))dt = \frac{A_2}{s_1} + \frac{A_3}{s_2} \;.$$

b) Nichtwiederherstellbare Reserve (μ=0). Dann

$$s_1 = a_3; s_2 = -a_2;\; R_0(s) = \frac{1}{s + a_3};\; R_0(t) = \exp(-a_3 t);\; r_1(s,0) = \frac{a_3}{s + a_3};$$

$$r_1(t,0) = a_3 \exp(-a_3 t) \;;\; R_1(s) = \frac{a_3}{(s + a_2)(s + a_3)} \;;$$

$$R_1(t) = \frac{2a_1 + a_2}{a_2}\left\{\exp(-2a_1 t) - \exp\left[-(2a_1 + a_2)t\right]\right\} \;;$$

$$R_2(s) = \frac{a_2 a_3}{s(s + a_2)(s + a_3)} \;;$$

$$R_2(t) = 1 - \frac{2a_1 + a_2}{a_2}\exp(-2a_1 t) + \frac{2a_1}{a_2}\exp\left[-(2a_1 + a_2)t\right] \;.$$

Es sei α_1=α_2=α (belastete Reserve), dann

$$R_0(t) = p^3; R_1(t) = 3p^2(1 - p); p = \exp(-\alpha t) \;,$$

wenn α_2=0 (unbelastene Reserve), so

$$R_0(t) = \exp(-2a_1 t); R_1(t) = \lim_{a_2 \to 0}(2a_1 + a_2)e^{-2a_1 t}\left(\frac{1 - e^{-a_2 t}}{a_2}\right) =$$

$$= 2a_1 t \exp(-2a_1 t) \;;$$

$$R_2(t) = 1 - e^{-2a_1 t}\lim_{a_2 \to 0}\frac{a_2 + 2a_1(1 - e^{-a_2 t})}{a_2} = 1 - (1 + 2a_1 t)e^{-2a_1 t} \;.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Arbeit ohne Versagen beträgt

$$P(t) = R_0(t) + R_1(t) = 1 - R_2(t) \;;\; T_{CHO} = \int_0^\infty P(t)dt = \frac{4a_1 + a_2}{2a_1(a_2 + 2a_1)}$$

T_{CHO}- bei der belasteten Reservierung beträgt $\frac{5}{6\alpha}$, und bei der unbelasteten $\frac{1}{a_1}$