Programm WEIBULL – ein Subprocessor zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteile mittels FEM-Unterstützung

Jakel, R.

Am IMW ist eine Berechnungssoftware entwickelt worden, die dem in der Praxis stehenden Ingenieur die Möglichkeit bietet, Zuverlässigkeit und Lebensdauer des von ihm entwickelten keramischen Bauteils schnell und komfortabel abzuschätzen. Im Gegensatz zu anderen sogenannten „Postprozessoren“ wird dabei die statistische Berechnung unmittelbar während des FEM-Laufes durchgeführt, zeitaufwendige Ein- und Ausleseprozeduren entfallen. Das Programm nutzt Schnittstellen zum kommerziellen, am IMW implementierten Finite-Elemente-Programm MARC.

The IMW has developed a powerful and userfriendly software for the engineer to calculate reliability and lifespan of ceramic engine parts. In opposite to other programs called "postprocessors", this program calculates statistics during the FE processing. So no time for in- and output operations is used. The program uses interfaces of the commercial FEM software MARC, which is used by the IMW.

1. Einleitung

Die Berechnung keramischer Bauteile unterscheidet sich in mehrfacher Hinsicht von der dem Ingenieur sehr viel vertrauteren Berechnung der üblichen metallischen Werkstoffe:

1) Durch die wesentlich größere Festigkeitsstreuung keramischer Werkstoffe können im Gegensatz zu Metallen keine deterministischen Aussagen getroffen werden („hält oder hält nicht“), sondern es kann nur eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden, mit der ein keramisches Bauteil einer äußeren Belastung standhält bzw. bei der es versagt.
2) Das Verhalten unter mehrachsiger Belastung unterscheidet sich erheblich von den Vorhersagen des für die Berechnung metallischer Werkstoffe bewährten von Mises- oder des Schubspannungskriteriums. Es muß bei keramischen Werkstoffen unbedingt zwischen Druck- und Zugfestigkeit unterschieden werden.
3) Keramische Werkstoffe können auch unter statischen Lasten nach langer Zeit plötzlich und ohne Vorankündigung versagen (unterkritisches Rißwachstum). Metallische Werkstoffe tun dies in der Regel nur bei dynamischen Lasten, wobei meist rechtzeitig makroskopisch sichtbare Anrisse erkannt werden können.
4) Keramische Werkstoffe sind in der Regel völlig spröde und weisen keine Duktilität auf, die den Abbau von Spannungsspitzen ermöglicht. Für die Festigkeitsrechnung bedeutet dies – im Gegensatz zu den anderen Eigenschaften – eine Vereinfachung, da das Materialverhalten sehr gut mittels des für linearelastische Werkstoffe gültigen Hookeschen Gesetzes beschrieben werden kann. Für die Konstruktionspraxis jedoch ist damit eine wesentlich größere Sorgfalt bei der Gestaltung und Lasteinleitung verbunden.

Eine Bestimmung der Überlebenswahrscheinlichkeit auf analytischem Wege ist bereits bei relativ einfach erscheinenden Geometrien praktisch nicht mehr möglich, da die Berechnung eine Integration der Spannungen über das gesamte belastete Bauteilvolumen bzw. die Bauteiloberfläche erfordert. Die Methode der Finiten Elemente eignet sich daher in hervorragender Weise zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit eines Bauteils, da nach der Berechnung für diskrete Punkte in der Struktur (Integrationspunkte) die Spannungen bekannt sind und daraus einfach eine numerische Näherungslösung für das Volumen- bzw. Oberflächenintegral ermittelt werden kann.

Das Programm WEIBULL ist eine in FORTRAN 77 programmierte Subroutinensammlung, die speziell für den Gebrauch mit dem Finite-Elemente-Programm MARC entwickelt worden ist. Als Schnittstelle wird dabei auf die MARC-Usersubroutinen „PLOTV“

und „USDATA“ zurückgegriffen, die es erlauben, die Werte des Spannungstensors für jeden Integrationspunkt abzufragen bzw. benutzerspezifische Daten (hier Steuerparameter, Werkstoffkennwerte für die Keramik und Belastungsdaten) im MARC-Eingabedeck festzulegen. Compilerspezifische Erweiterungen sind bei der Programmierung nicht vorgenommen worden, so daß WEIBULL auf vielen unterschiedlichen Systemen lauffähig ist.

Die Subroutinensammlung WEIBULL bietet die Möglichkeit, die Sofort- und Zeitausfallwahrscheinlichkeit nach drei verschiedenen globalen Mehrachsigkeitshypothesen /1-3/ während eines einzigen Rechenlaufs gleichzeitig zu ermitteln. Ein großer Vorteil des Programms für die Auslegungspraxis ist die Möglichkeit, die Zeitausfallwahrscheinlichkeit auch unter instationärer Belastung ermitteln zu können. Hierzu wird das phänomenologisch-statistische Modell nach Nadler /4/ genutzt. Unabhängig von der keramischen Berechnung erlaubt das Programm, Spannungs- und Dehnungskomponenten zu ermitteln (Radial-, Tangential- und Hauptspannungen, Hauptschubspannungen bzw. entsprechende Verzerrungen) und grafisch mittels des Pre- und Postprocessors MENTAT darzustellen. Desweiteren kann das zu einem Integrationspunkt zugehörige Teilvolumen („Subelementvolumen“) wie das Gesamtvolumen der FE-Struktur bestimmt werden.

2. Weibull-Verteilung

An spröden Werkstoffen, insbesondere an Keramik, lassen sich folgende grundlegende Eigenschaften beobachten:

1) Die Festigkeit ist kein deterministischer Wert, sondern kann erheblich streuen;
2) große Teile haben eine niedrigere Festigkeit als kleine;
3) das Materialverhalten ist linearelastisch, begrenzt durch einen Sprödbruch.

Zur Beschreibung dieses Materialverhaltens können folgende Annahmen gemacht werden:

1) Ein Bauteil mit dem Volumen V besteht aus vielen tragenden Volumenelementen, sogenannten „Bezugsvolumen“, ähnlich einer Kette aus einzelnen Kettengliedern (daher die Bezeichnung „Weakest Link Concept“ – „Modell des schwächsten Kettengliedes“);
2) die Festigkeit der einzelnen Volumenelemente ist statistisch verteilt;
3) wegen der Sprödheit des Materials führt der Bruch eines Bezugselementes zum Bruch der gesamten Struktur, Spannungen werden nicht durch plastisches Fließen wie bei duktilen Werkstoffen abgebaut.

Mittels dieser Modellannahmen entwickelte Weibull 1939 /5/ die nach ihm benannte Verteilung. Demnach läßt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit eines einachsig auf Zug belasteten Bauteils aus der Gleichung

$$P_f(\sigma) = 1 - e^{-R_r} = 1 - e^{-\frac{1}{V_0 \cdot \sigma_0^m} \int_V (\sigma - \sigma_u)^m \, dV}$$

ermitteln. Hierin sind:

P_f Ausfallwahrscheinlichkeit
R_r Bruchrisiko („risk of rupture“)
σ (einachsige) Spannung im Bauteil
σ_u untere Grenzspannung, unterhalb derer kein Bruch mehr auftritt (Mindestfestigkeit)
σ_0 Bezugselementfestigkeit („scale parameter“)
V Bauteilvolumen
V_0 Volumen des Bezugselementes
m Weibullmodul („shape parameter“), ein Maß für die Streuung der Festigkeit

Praktisch setzt man meist σ_u zu Null, da ein unterer Grenzwert experimentell nur sehr schwierig nachzuweisen ist und man mit dieser Vereinfachung „auf der sicheren Seite“ liegt. Normiert man die Weibull-Verteilung mit der maximal auftretenden Spannung σ_{max} im Bauteil, so ergibt sich mit $z=\sigma/\sigma_{max}$, $z_0=\sigma_0/\sigma_{max}$, $z_u=\sigma_u/\sigma_{max}$ die Beziehung

$$P_f = 1 - e^{-\frac{1}{V_0 \cdot z_0^m} \int_V (z - z_u)^m \, dV}$$

Damit wird das Integral von der absoluten Höhe der Beanspruchung unabhängig. Um das Integral auch vom Bauteilvolumen V unabhängig zu machen, führt man die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{V} \frac{dV}{dz}$$

ein, die den Namen „Spannungsdichtefunktion“ trägt und zur Vereinfachung der weiteren analytischen Behandlung dient /4/. Damit wird

$$P_f = 1 - e^{-\frac{V}{V_0 \cdot z_0{}^m} \int_0^1 f(z)(z - z_u)^m dz}$$

Zusammenfassen des Integrals und Resubstituieren von z_0 ergibt:

$$P_f = 1 - e^{-\frac{V}{V_0} \cdot \frac{\sigma_{max}{}^m}{\sigma_0{}^m} \cdot I} \qquad (*)$$

Hierin ist

I normiertes Weibull-Integral, abhängig von:
  a) der Geometrie des belasteten Bauteils,
  b) von der Spannungsverteilung und
  c) vom Weibullmodul m;

V Gesamtvolumen des Bauteils.

Die Größen I und V sowie die maximale Spannung σ_{max} werden näherungsweise vom Programm WEIBULL bestimmt, so daß mit ihrer Kenntnis und obiger Gleichung die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine andere absolute Lasthöhe σ_{max} oder ein anderes absolutes Bauteilvolumen V einfach und ohne erneuten FEM-Durchlauf analytisch berechnet werden kann – wichtig z.B. für Baureihenentwicklungen.

3. Einsatz der FE-Methode

Die Weibull-Verteilung kann für eine konstante (einachsige) Spannung in einem Bauteil mit dem Volumen V vereinfacht geschrieben werden:

$$P_f(\sigma) = 1 - e^{-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m}$$

Man kann sich nun ein Bauteil zusammengesetzt denken aus lauter kleinen „Subbauteilen", in denen näherungsweise eine solche konstante Spannung herrscht. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten $P_{s,i}$ ($P_{s,i}$ = 1– $P_{f,i}$) aller Subbauteile miteinander multipliziert ergibt die Gesamtüberlebenswahrscheinlichkeit.

Eine FE-Struktur eignet sich in idealer Weise für eine solche Berechnung, weil der Gesamtkörper durch die Elementierung bereits in kleinere Volumen zerlegt ist. In einem finiten Element sind die Spannungen an mehreren diskreten Punkten, den sogenannten Integrationspunkten, bekannt. Man könnte nun das Elementvolumen $V_{FE,i}$ bestimmen und den Mittelwert der Spannungen aller Integrationspunkte des Elementes bilden. Damit ließe sich das Bruchrisiko $R_{rFE,i}$ des Elementes i aus der Gleichung

$$R_{rFE,i} = \frac{V_{FE,i}}{V_0}\left(\frac{\overline{\sigma}_i - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m$$

berechnen. Einer Multiplikation der Überlebenswahrscheinlichkeiten entspricht einer Addition der Elementbruchrisiken, so daß die Gesamtausfallwahrscheinlichkeit der Struktur aus n Elementen ermittelbar ist durch die Beziehung

$$P_f = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n} R_{rFE,i}}$$

Bei starken Spannungsgradienten führt dieses Verfahren jedoch zu sehr unbefriedigenden Ergebnissen, da die Mittelwertbildung höhere Integrationspunktspannungen (die ja mit der Potenz von m eingehen) zu wenig berücksichtigt. Praktisch werden oft viel zu niedrige Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet.

Es bietet sich daher an, jedem Integrationspunkt des Elementes ein bestimmtes zugehöriges Teilvolumen zuzuordnen. Man könnte dies durch Division des Gesamtelementvolumens durch die Anzahl der Integrationspunkte berechnen, was aber bei verzerrten Elementen ebenfalls unnötig große Abweichungen verursacht. Das Programm WEIBULL bildet daher mittels vektorgeometrischer Beziehungen Hilfsknoten in den Elementen, aus denen dann das zu einem Integrationspunkt gehörige Teilvolumen $V_{sub,ij}$, das sogenannte Subelementvolumen, berechnet wird. Für die FE-Struktur aus n Elementen mit je k Integrationspunkten erhält man dann die Strukturausfallwahrscheinlichkeit aus der Gleichung

$$P_f = 1 - e^{-\frac{1}{V_0 \cdot \sigma_0{}^m} \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k} V_{sub,ij}\left(\sigma_{ij} - \sigma_u\right)^m\right]}$$

Stellt die Struktur nur einen Teil des Gesamtvolumens des Bauteils da, was in vielen FE-Rechnungen wegen der Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften der Fall ist, so muß die Gesamtausfallwahrscheinlichkeit durch Potenzieren der Strukturüberlebenswahrscheinlichkeit mit dem Symmetriefaktor berechnet werden. In WEIBULL kann man daher einen solchen Faktor eingeben: Bei der Ausgabe wird zwischen Strukturvolumen (also das Volumen, das das FE-Netz umschließt) und dem Gesamtvolumen (das Volumen des realen Bauteils) unterschieden.

Dieses Verfahren liefert bei einer im Zugbereich sorgfältigen, aber nicht notwendigerweise sehr feinen Netzgenerierung in Verbindung mit höherwertigen Elementen befriedigende Ergebnisse. Ein genaueres Verfahren zur Ausfallwahrscheinlichkeitsberechnung durch Ausnutzen von Formfunktionen der Elemente /6/ ist bei der in der praktischen Anwendung erzielbaren Genauigkeit bei der Extrapolation von der Probe auf das Bauteil nicht zwingend notwendig.

Neben der errechneten Ausfallwahrscheinlichkeit gibt das Programm WEIBULL dem Benutzer auch das Volumen, die maximale Spannung und das normierte Weibull-Integral aus. Dieses Integral wird jedoch nicht durch numerisches Integrieren der Spannungsdichtefunktion errechnet, sondern einfach durch Umstellen von Gleichung (*) nach I, da nach der FEM-Berechnung alle Größen rechts des Gleichheitszeichens bekannt sind:

$$I = -\frac{V_0 \cdot {\sigma_0}^m \cdot \ln(1-P_f)}{V \cdot {\sigma_{max}}^m}$$

Mit der Kenntnis dieses Integrals kann leicht die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine andere absolute Lasthöhe ohne erneuten FEM-Berechnungslauf analytisch berechnet werden.

4. Mehrachsigkeitseinfluß

Die bisher vorgestellte Verteilung erlaubt nur die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit bei einachsiger Bauteilbeanspruchung. Für den mehrachsigen Beanspruchungsfall muß für die einachsige Spannung σ eine geeignete Vergleichsspannung σ_V

$$\sigma_V = f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$$

gesetzt werden. Weibull selbst hat in seiner Arbeit einen Lösungsansatz vorgestellt, indem er alle positiven Normalspannungskomponenten über die Einheitskugel integrierte. Andere Autoren schlagen eine Kombination des statistischen Modells mit bruchmechanischen Ansätzen vor. Da alle diese Verfahren wegen der damit verbundenen Integrationen jedoch zusätzliche Rechenzeit benötigen, wurden für das Programm WEIBULL drei recht einfache, globale Mehrachsigkeitshypothesen programmiert, die für den praktischen Einsatz meist befriedigende Ergebnisse liefern – zumal, wenn man die Vorhersagen der Kriterien vergleichen kann. Dies sind:

a) Barnett-Freudenthal-Approximation /1/
b) Weibull-Stanley-Theorie /2/
c) Hypothese der positiven Hauptdehnungen /3/

Alle diese Hypothesen beruhen auf dem sogenannten PIA-Modell (Principle of Independend Action). Dabei werden drei Teilvergleichsspannungen σ_{iV}, nämlich

– die positiven Hauptspannungen bei a) ;
– die positiven Hauptspannungen bzw. im Falle negativen Hauptspannungen mit dem gemessenen Verhältnis von einachsiger Druck- zur Zugfestigkeit σ_d/σ_z umgerechnete Teilvergleichsspannungen bei b);
– die positiven Hauptdehnungen bei c);

nach der Gleichung

$$\sigma_V = \sqrt[m]{(\sigma_{1V}-\sigma_u)^m + (\sigma_{2V}-\sigma_u)^m + (\sigma_{3V}-\sigma_u)^m} + \sigma_u$$

zu einer resultierenden Vergleichsspannung σ_V überlagert und tragen so unabhängig voneinander einen Teil zur Ausfallwahrscheinlichkeit bei.

Bei der praktischen Anwendung ist allerdings oft nicht bekannt, mit welcher Hypothese das Versagensverhalten des eingesetzten keramischen Konstruktionswerkstoffs am besten beschrieben werden kann. Hier sollen daher die wesentlichen Unterschiede der drei vorgestellten Kriterien kurz erläutert werden. Dazu dienen die **Bilder 1 bis 3**.

Diese Bilder zeigen die Hüllkurven der Festigkeit für den zweiachsigen Spannungszustand nach den drei Hypothesen, normiert mit der einachsigen Zugfestigkeit σ_z. Zum besseren Vergleich sind die Hypothese der positiven Hauptdehnungen und die Weibull-Stanley-Theorie für eine Querkontraktionszahl von ν=0,2 bzw. einem Festigkeitsverhältnis von σ_d/σ_z=5 aufgetragen. Die Festigkeitsstreuung ist dabei nicht berücksichtigt, d.h., m=∞ . Es fällt auf, daß:

– Barnett-Freudenthal-Approximation und Weibull-Stanley-Theorie im ersten Quadranten identisch sind;
– die Hypothese der positiven Hauptdehnungen bei biaxialer Zugbeanspruchung eine höhere, bei biaxialer Druckbeanspruchung eine geringere Überlebenswahrscheinlichkeit hat als die Weibull-Stanley-Theorie bzw. die Barnett-Freudenthal-Approximation;

– im Zug-Druck- wie im Druck-Druck-Quadranten die Hypothese der positiven Hauptdehnungen das schärfste Kriterium darstellt.

Im dreiachsigen Fall liefert bei Zugbeanspruchungen die Hypothese der positiven Hauptdehnungen die geringste Ausfallwahrscheinlichkeit. Bei isostatischer Druckbeanspruchung errechnen Barnett-Freudenthal-Approximation und Hypothese der positiven Hauptdehnungen eine Bruchwahrscheinlichkeit von Null, während die Weibull-Stanley-Theorie einen Bruch vorhersagt. Da das Programm WEIBULL Ausfallwahrscheinlichkeiten nach allen drei Hypothesen berechnet, können durch Vergleich auch Rückschlüsse auf den Spannungszustand im Bauteil und die „Sicherheit“ der Vorhersage gemacht werden.

5. Lebensdauerabschätzung

Bisher wurde nur die sogenannte „Sofortausfallwahrscheinlichkeit“ betrachtet, d.h., die Wahrscheinlichkeit, mit der das Bauteil unmittelbar nach Auftreten der Beanspruchung versagt. Praktisch existiert jedoch ein mehr oder weniger stark ausgeprägter statischer Dauerfestigkeitseffekt, d.h., nach einer bestimmten Belastungszeit kann auch ein Bauteil versagen, das zunächst der Beanspruchung gewachsen war. Dieser Effekt – neben der Festigkeitsstreuung – macht es notwendig, keramische Bauteile mit sehr großer Sicherheit gegenüber der kurzzeitig ertragbaren Spannung auszulegen bzw. die Belastungszeit in die Berechnung mit einzubeziehen.

Ein für die praktische Arbeit sehr gut handhabbarer und einfacher Ansatz wird von /4/ vorgestellt. Dabei wird das Bruchrisiko der Weibullschen Verteilungsfunktion durch einen Exponentialansatz erweitert, so daß sich ergibt:

$$P_f = 1 - e^{-\frac{1}{V_0}\int_V \left(\frac{\sigma-\sigma_u}{\sigma_0}\right)^m dV \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\mu}}$$

mit

t Belastungszeit,

t_0 Bezugszeit,

μ Zeiteinflußparameter (Werkstoffkenngröße).

Dieser Ansatz kann auch für mehrachsige und zeitlich instationäre Beanspruchungen ausgeweitet werden. Damit erhält man

$$P_f = 1 - e^{-\frac{V}{V_0 \cdot \sigma_0^{m} \cdot t_0^{\mu}} \cdot I \cdot \left\{\int_0^t \sigma_{iV\,max}(t)^{m/\mu}\, dt\right\}^{\mu}} \qquad (**)$$

mit

t Gesamtbelastungszeit,

I normiertes Weibull-Integral nach einer der Mehrachsigkeitshypothesen,

$\sigma_{iVmax}(t)$ zeitlicher Verlauf der maximalen Teilvergleichsspannung nach einer der Mehrachsigkeitshypothesen.

Für stufenförmige Lasten kann man sich eine Ersatzbelastungszeit aus der Gleichung

$$t_{ers} = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\sigma_{iV\,max,j}}{\sigma_{iV\,max}}\right)^{\frac{m}{\mu}} t_j\right]$$

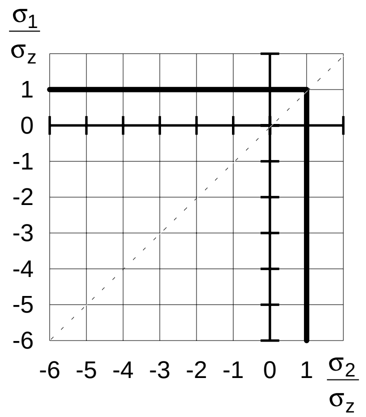

Bild 1: Barnett-Freudenthal-Approximation im σ_1/σ_1-Diagramm ($m=\infty$)

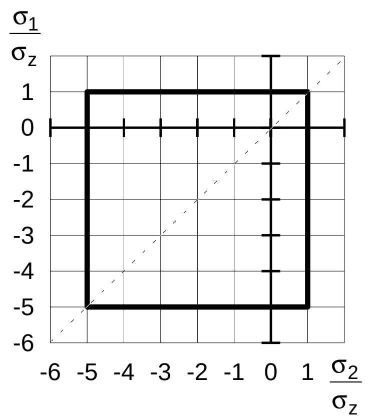

Bild 2: Weibull-Stanley-Theorie im σ_1/σ_1-Diagramm für $\sigma_d/\sigma_z=5$ ($m=\infty$)

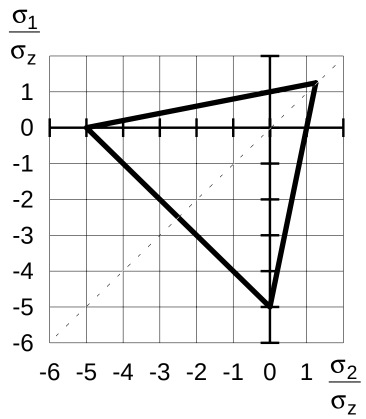

Bild 3: Hypothese der positiven Hauptdehnungen im σ_1/σ_1-Diagramm für $\nu=0,2$ ($m=\infty$)

mit

σ_{iVmax} maximale Teilvergleichsspannung (Bezugsspannung) nach einer der drei Mehrachsigkeitshypothesen für die größte Last aller Stufen,

$\sigma_{iVmax,j}$ maximale Teilvergleichsspannung nach einer der vorgestellten Hypothesen für die j-te Laststufe,

n Zahl der Laststufen,

t_j Belastungszeit der Stufe j,

berechnen.

Damit vereinfacht sich Gleichung (**) zu

$$P_f = 1 - e^{-\frac{V}{V_0} \cdot \frac{\sigma_{iV\,max}{}^m}{\sigma_0{}^m} \cdot \frac{t_{ers}{}^\mu}{t_0{}^\mu} \cdot I}$$

Voraussetzung für die Anwendung dieser Gleichung ist, daß der Beanspruchungszustand im Bauteil über der Zeit sich qualitativ nicht ändern darf. Ändert er sich, so kann kein normiertes Weibullintegral mehr angegeben werden.

Mittels des Programms WEIBULL kann aber dennoch eine zeitlich abhängige Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet werden. Dazu werden die jetzt auch qualitativ unterschiedlichen Beanspruchungen in den einzelnen Laststufen mit einer vom Benutzer angebbaren Stufenbelastungszeit berücksichtigt. Die Gesamtausfallwahrscheinlichkeit der Struktur aus n Elementen mit je k Integrationspunkten über die j Laststufen (Belastungszeit je Laststufe, d.h., je Increment der MARC-Berechnung: t_i) kann dann aus der Gleichung

$$P_f = 1 - e^{-\frac{1}{V_0 \cdot \sigma_0{}^m \cdot t_0{}^\mu} \cdot \sum\limits_{b=1}^{n} \left[\sum\limits_{l=1}^{k} V_{sub,bl} \cdot \left\{ \sum\limits_{i=1}^{j} \left(\sigma_{V,bli} - \sigma_u\right)^{m/\mu} t_i \right\} \right]^\mu}$$

ermittelt werden. Darin ist $\sigma_{V,bli}$ die resultierende Vergleichsspannung nach einer der drei globalen Mehrachsigkeitshypothesen.

/4/ vergleicht das von ihm vorgestellte Modell mit dem bruchmechanischen der langsamen Rißausbreitung, gesteuert durch den Rißausbreitungsparameter n der Paris-Gleichung. Danach ist folgendes festzustellen: Für extrem kurze Belastungszeiten liefern die Modelle unterschiedliche Vorhersagen, da das phänomenologisch-statistische Modell für eine Belastungszeit von Null auch eine Bruchwahrscheinlichkeit von Null vorhersagt. Das bruchmechanische Modell dagegen strebt gegen die Inertfestigkeit. /4/ definiert daher zusätzlich zur Inertfestigkeit die sogenannte 1-Sekunden-Kurzzeitfestigkeit, die durch eine Weibull-Verteilung angenähert wird.

Ab der unter üblichen Bedingungen gemessenen Kurzzeitfestigkeit können die Modelle dagegen recht gut verglichen werden. Es existiert die Parameterentsprechung

$$\mu \approx \frac{m}{n}$$

mit

m Weibull-Modul,

n Rißausbreitungsparameter der Paris-Gleichung.

Sind also Weibullmodul und Rißausbreitungsparameter z.B. aus Prospektwerten oder Literaturangaben bekannt, so kann daraus der Parameter μ bestimmt und eine überschlägige Näherungsrechnung mittels des Programms WEIBULL gemacht werden. Liegen solche Werte nicht vor, so ermittelt man den Parameter μ zweckmäßig im Stufenversuch /4/.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Ausfallzeiten einer Charge keramischer Bauteile bei völlig gleicher Beanspruchung um weit mehr als zwei Zehnerpotenzen streuen können, was zusammen mit der Unsicherheit in der Parameterbestimmung und der Problematik einer Festigkeitsrechnung große Sorgfalt bei Berechnung und Gestaltung und ausreichende „Sicherheitsfaktoren" notwendig macht. Oft kann man auch den Rißfortschritt nicht mit einem einfachen Potenzgesetz beschreiben, was dann wesentlich aufwendigere Berechnungen erfordert.

6. Programmtechnische Umsetzung

Im Gegensatz zu anderen sogenannten „Postprocessoren" (z.B. das Programm „CARES" der NASA), die eine Ausfallwahrscheinlichkeitberechnung erst nach vollzogener FE-Berechnung erlauben, werden beim Programm WEIBULL vorhandene Schnittstellen, sogenannte „Usersubroutinen", unmittelbar während des FE-Rechenlaufes genutzt. Es handelt sich also nicht um eine selbständige Programmeinheit, die ihre Daten aus einem zu erzeugenden oder bereits vorhandenem Ergebnisfile liest, sondern um eine Subroutinensammlung, die die während des FE-Programmlaufes zur Verfügung stehenden Daten verarbeitet. Entsprechend einfach wird das Programm WEIBULL beim Aufruf des FEM-Programms MARC durch den üblichen Befehl für eine Usersubroutine „marc -jid jobname -u weibull“ gestartet. Dadurch wird das Programm übersetzt, an das MARC-Hauptprogramm gebunden und ein neues Executable erzeugt, was direkt während des MARC-Rechenlaufes die Ausfallwahrscheinlichkeitsberechnung vornimmt. Durch dieses Prinzip sind also keine zeitaufwendigen Ein- und Ausleseprozeduren notwendig, ebenso erhöht sich der Bedienungskomfort beträchtlich, weil separate Steuerfiles nicht beschrieben und verarbeitet werden müssen. Alle notwendigen Daten können direkt aus dem MARC-Eingabefile gelesen werden.

Zur Eingabe solcher Werkstoff- und Steuerdaten dient die MARC-Usersubroutine USDATA /7/. Damit können die benutzerspezifischen Daten aus dem Eingabedeck herausgelesen und in selbstdefinierten Commonblöcken abgelegt werden. Materialdaten wie Weibullmoduli oder charakteristische Spannungen (bis zu 6 verschiedene Keramikbauteile können während eines Laufes berechnet werden) oder auch Steuerparameter (z.B. für den gewünschten Umfang an Ausgabeinformationen) stehen also jederzeit zur Verfügung.

Wesentliche Basis des Programms WEIBULL ist jedoch die Usersubroutine PLOTV /7/. Diese Subroutine übergibt für jeden Integrationspunkt des FE-Netzes den Spannungstensor. Nach der Berechnung des zum Integrationspunkt gehörenden Teilvolumens können so mittels der durch die Subroutine USDATA zur Verfügung gestellten Materialdaten die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Subelemente und schließlich die der Gesamtstruktur berechnet werden. Den prinzipiellen Ablauf der Berechnungsvorgänge zeigt das Flußdiagramm **Bild 4**.

Die Subroutinensammlung WEIBULL ist modular aufgebaut, d.h., jeder Berechnungsschritt wird in einer separaten, übersichtlichen Subroutine durchgeführt. Steuerndes „Hauptprogramm“ ist dabei die Usersubroutine PLOTV.

7. Weitere Features und Grenzen von WEIBULL

Neben der Hauptaufgabe, Ausfallwahrscheinlichkeiten für keramische Bauteile zu berechnen, hat das Programm WEIBULL eine Reihe an Features, die es auch für den allgemeinen FEM-Nutzer interessant machen. Dazu zählt die Berechnung bestimmter Tensorkomponenten (z.B. Hauptspannungen, Hauptdehnungen) sowie die Möglichkeit, das Volumen bzw. die Oberfläche einer FEM-Struktur anhand der Knotenkoordinaten des unverformten Netzes zu berechnen. Diese Größen können übrigens auch mit der am Institut für Maschinenwesen entwickelten Subroutine PLOTVOL berechnet werden.

Derzeit ist die Verwendung des Programms beschränkt auf folgende MARC-Elementtypen /8/:

a) Ebener Spannungszustand: Typ 3, 26, 114, 124
b) Ebener Dehnungszustand: Typ 11, 27, 115, 125
c) Axialsymmetrischer Spannungszustand: Typ 10, 28, 116, 126

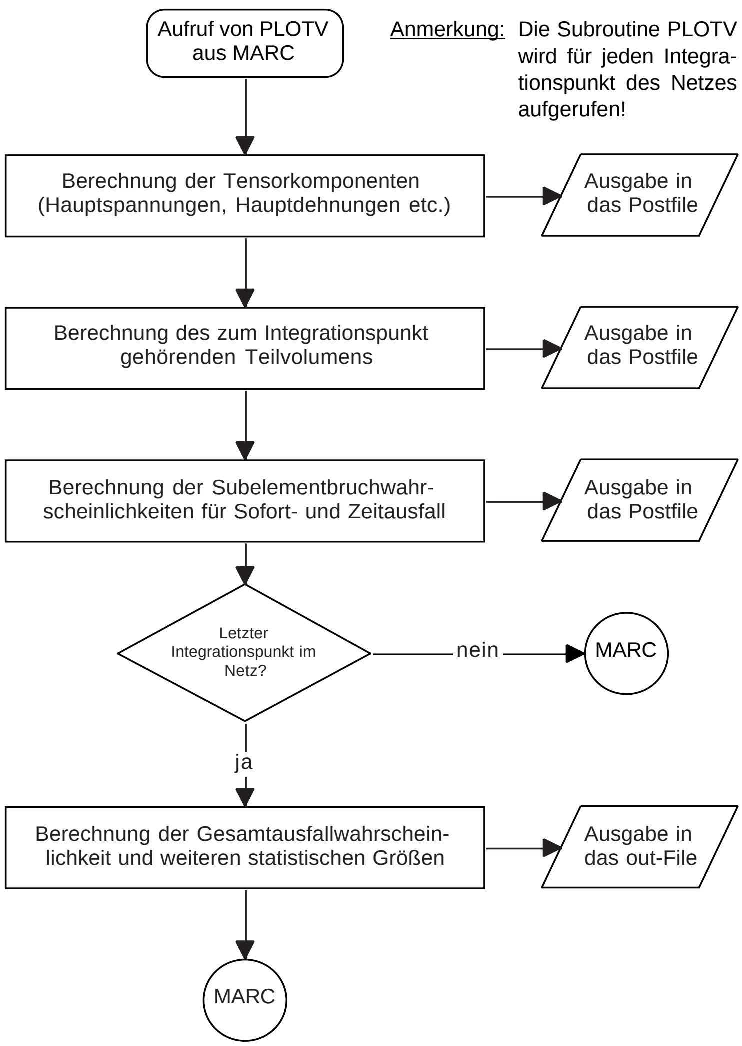

Bild 4: Vereinfachter Ablauf des Berechnungsganges in WEIBULL

d) Dreidimensionaler Spannungszustand: Typ 7, 21, 117, 127
e) Schalenelemente: Typ 22, 75

Die besten Ergebnisse werden mit den QUAD8- und HEXA20-Elementen mit höherwertigen Rechenansätzen erzielt, also hier die Elemente 26, 27, 28 und 21. Insbesondere bei hohen Biegebeanspruchungen mit großen Spannungsgradienten sind die „einfachen“ Elemente (QUAD4-, TRIANGLE6- , HEXA8-, und TETRA10-Elemente) mit einer geringeren Zahl an Integrationspunkten zu vermeiden. Wird die MARC-Usersubroutine PLOTV, auf der die Subroutinensammlung WEIBULL aufbaut, für einen Elementtyp aufgerufen, den WEIBULL nicht unterstützt, so erfolgt keine Ausgabe und der Sprung zurück zu MARC. Das Programm erlaubt in-core- und out-of-core-Berechnungen, die zulässige Größe des Jobs hängt nur vom verwendeten Computersystem ab.

8. Zusammenfassung des Vorgehens bei einer Bauteilauslegung

Möchte man ein Bauteil auf seine Zuverlässigkeit überprüfen, so kann unter Verwendung des Programms WEIBULL und des FE-Programmsystems MARC/MENTAT wie folgt vorgegangen werden:

1) Durchführung von Festigkeitsmessungen an Proben aus dem Bauteil (z.B. 4-Punkt-Biegeversuch)
2) Ermitteln der Weibull-Parameter
3) Netzgenerierung und Erstellung der Randbedingungen mittels des Pre- und Postprocessors MENTAT
4) Eingabe der Werkstoffkennwerte und Steuerparameter unter der Karte USDATA im MARC-Inputdeck
5) Eingabe der gewünschten Postvariablen unter der Steuerkarte POST
6) MARC-Rechenlauf mit Aufruf
   marc -jid jobname -u weibull
7) Analyse der Überlebens- und Ausfallwahrscheinlichkeiten, normierten Weibullintegrale, Gesamtvolumen und Spitzenspannungen im out-File
8) Interpretation der Vergleichsspannungen und lokalen Bruchwahrscheinlichkeiten aus dem Postfile mittels des Pre- und Postprocessors MENTAT

In Verbindung mit dem Finite-Elemente-Programm MARC erhält der Benutzer also ein leistungsfähiges Werkzeug zur Berechnung keramischer Bauteile. Umfangreiche Informationen zur Theorie, zur Installation und zur Nutzung des Programms WEIBULL enthält das im IMW verfaßte Handbuch /9/, aus dem für diesen Aufsatz einige Teile gekürzt entnommen sind.

9. Literaturverzeichnis

/1/ Barnett, R.L. et al.: Fracture of Brittle Materials Under Transient Mechanical and Thermal Loading; AFFDL-TR-66-220 (1967)
Freudenthal, A.M.: Statistical Approach to Brittle Fracture; Fracture Vol. 2, Liebowitz, ed., Academic Press, New York (1968), 591-619

/2/ Stanley, P.; Fessler, H.; Sivill, A.D.: An Engineer´s Approach to the Prediction of Failure Probability of Brittle Components; Proc. Br. Ceram. Soc., 22 (1973), S. 153-187

/3/ Beierlein, G.: Festigkeitsverhalten keramischer Werkstoffe unter mehrachsiger mechanischer Beanspruchung; Diss. Ingenieurhochschule Zwickau (1988)

/4/ Nadler, P.: Beitrag zur Charakterisierung und Berücksichtigung des spezifischen keramischen Festigkeitsverhaltens; Diss. Bergakademie Freiberg (1989)

/5/ Weibull, W.: A Statistical Theory of the Strength of Materials; Ingeniörsvetenskapsakademiens Handlingar, Stockholm, Nr. 151 (1939)

/6/ Heger, A.: Bewertung der Zuverlässigkeit mehrachsig belasteter keramischer Bauteile; Fortschritt-Berichte VDI Reihe 18 Nr. 132, Düsseldorf: VDI-Verlag 1993

/7/ MARC Analysis Research Corporation: Handbuch D „User Subroutines“ zum FE-Programm MARC, Rev. K5.2; Palo Alto, North America, 1992

/8/ MARC Analysis Research Corporation: Handbuch B „Element Library“ zum FE-Programm MARC, Rev. K5.2; Palo Alto, North America, 1992

/9/ Jakel, R.: Programm WEIBULL – ein Subprozessor zur Abschätzung der Sofort- und Zeitausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteile für das Finite-Elemente-Progamm MARC. Theorie und Bedienungsanleitung; Handbuch, IMW TU Clausthal, September 1994