

# Berechnung und Optimierung von Bolzen-Lasche-Verbindungen

Dietz, P.; Rothe, F.

*Der folgende Artikel enthält die wesentlichen, für den Konstrukteur der Praxis direkt anwendbaren Ergebnisse eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unter dem Kennzeichen Di 289/8 geförderten Vorhabens. Das Thema wird in der nächsten Zeit in Teilberichten der Fachpresse angeboten, hier haben wir uns für eine geschlossene - wenn auch ungewöhnlich lange - Darstellung entschieden, damit der Anwender alle erforderlichen Angaben in einem Artikel vorfindet.*

*This paper contains the essential results of the research project (Di 289/8) sponsored by the German Research Community (DFG). These results are directly applicable by the designer for his industrial work.*

## 1. Einleitung, Stand bisheriger Berechnungsverfahren

Laschenverbindungen gehören im Maschinenbau zu den am weitesten verbreiteten Verbindungselementen. Da sie meist die verantwortlich tragenden Elemente beim Halten und Bewegen großer Lasten sind (z.B. Schäkel), als lösbare Verbindungselemente die Kraftübertragung innerhalb der Konstruktion übernehmen (z.B. Bolzengelenke) oder verantwortlich für die Übertragung hoher Leistungen sind (z.B. Gelenk Ketten), ist mit ihrem Ausfall ein hohes Sicherheitsrisiko für Mensch und Gerät verbunden. Die Tatsache, daß diese Elemente in der überwiegenden Zahl der Fälle ohne Redundanz eingesetzt werden, erfordert eine Auslegung nach dem Prinzip des sicheren Bestehens, wobei für die Bauteilsicherheit auch das Bauteilverhalten nach einmaliger Überlastung mit elasto-plastischer Verformung entscheidend sein kann. Darüber hinaus besteht im allgemeinen Maschinenbau die Forderung nach Formleichtbau dieser überwiegend als Massenartikel hergestellten Elemente.

Die Spannungsverteilung in Zugelementen wird maßgeblich durch das Kontaktverhalten der einzelnen Bauteile bestimmt. Die Verteilung des Kontaktdrucks

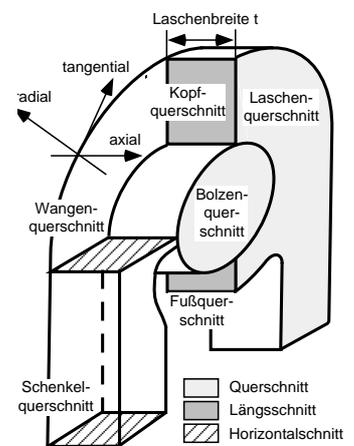
hängt dabei von Parametern ab, die sich aus dem gewählten Spiel und dem Verformungsverhalten der an der Verbindung beteiligten Elemente ableiten lassen. Hinzu kommt das Verfestigungsverhalten des Materials, welches bei überelastischer Beanspruchung das Tragvermögen einer solchen Verbindung erheblich steigern kann.

In der im folgenden beschriebenen Arbeit war die Aufgabe gestellt, mit Hilfe grundlegender mechanischer Ansätze und durch ergänzende Finite-Elemente-Rechnungen ein Verfahren zur Berechnung spielbehafteter Laschenverbindungen zu entwickeln, das das Verformungsverhalten der beteiligten Elemente bei der Beanspruchungsermittlung berücksichtigt und teilplastische Verformungen zuläßt. Entsprechend dem gewählten wissenschaftlichen Ansatz ergibt sich damit eine

Aufteilung auch in dieser Veröffentlichung: Die Ermittlung der Kontakt-druckverteilung, die Berechnung der Beanspruchungen und Vorschläge zur Optimierung von Laschenverbindungen. Die Arbeit befaßt

sich mit statischen Lastfällen und enthält die z.B. bei der

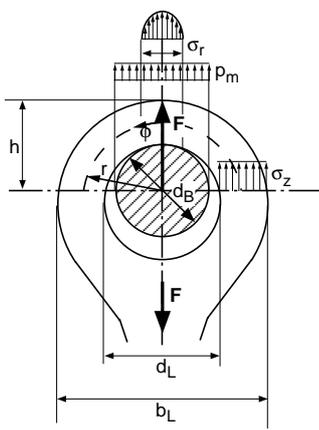
Auslegung von Ketten zu berücksichtigenden dynamischen Effekte nicht. Die Veröffentlichung beschreibt nur elastische Beanspruchungsfälle, das Verhalten im teilplastischen Bereich wird gesondert publiziert. Zur Erläuterung der im folgenden verwendeten Begriffe zeigt **Bild 1.1** eine Übersicht.



**Bild 1.1** Charakteristische Schnitte in einer Bolzen-Lasche-Verbindung

## 1.1 Elementare Beanspruchungen

Viele Bauarten und Anordnungen von Laschenverbindungen sind mit ihren zu garantierenden Traglasten und erforderlichen Sicherheitsbeiwerten ge-



Beanspruchung	
Lochleibung	$q_m = \frac{F}{t \cdot d_B} \leq q_{m,zul}$
Hertzsche Pressung	$p_{Ht} = \sqrt{\frac{F}{t} \frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{d_B} - \frac{1}{d_L} \right)} \leq p_{Ht,zul}$ mit $b_H = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{F(1-\nu^2)}{tE} \left( \frac{1}{d_B} - \frac{1}{d_L} \right)}$
Laschenzugspannung	$\sigma_z = \frac{F}{2 \cdot A_L} \leq \sigma_{z,zul}$
max. Spannung	$\sigma_{max} = \sigma_n \cdot \alpha_k$ mit $\sigma_n = \frac{F}{t(b_L - d_L)}$ $\alpha_k = \frac{9}{5} + \left( \frac{b_L}{d_L} - \frac{6}{5} \right) \left( \frac{9}{5} - \frac{h}{b_L} \right)$
Scherspannung im Bolzen	$\tau_{sm} = \frac{F}{i \cdot A_B}$ <span style="margin-left: 2em;"><math>i = \text{Schnittstellanzahl}</math></span> <span style="margin-left: 2em;"><math>A_B = \text{Bolzenquerschnitt}</math></span>

Bild 1.2 Elementare Beanspruchungen in Bolzen-Lasche-Verbindungen nach /1 bis 4/

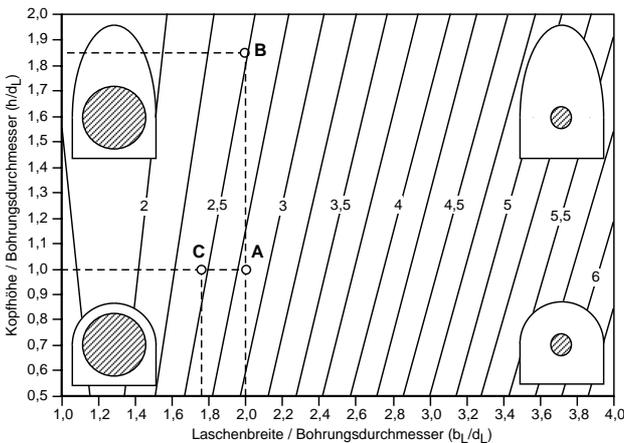


Bild 1.3 Formzahl  $\alpha_k$  für spielfreien Bolzen-Lasche-Verbindungen in Abhängigkeit von den Wangen- und Kopfabmessungen. A Standardlasche, B kopfüberhöhte Lasche, C wangenreduzierte Lasche. Eingezeichneter Datenfall: Um  $\alpha_k$  von 2,8 auf 2,5 zu erniedrigen, muß man die Kopfhöhe der Standardlasche um 85% erhöhen oder die Laschenbreite um 12% verkleinern.

normt oder in entsprechenden Empfehlungen der Hersteller festgelegt. Die allgemeine Maschinenelementeliteratur /1 bis 4/ geht davon aus, daß in der Kontaktzone je nach Verbindungstyp Lochleibung oder Hertzsche Pressung und in der Lasche eine Kombination von Zug-, Scher- und Biegespannungen auftreten. Bild 1.2 zeigt eine Übersicht über diese elementaren Beanspruchungen und ihre Berechnung. Lochleibung wie Hertzsche Pressung sind dabei die Grenzfälle einer Berechnung mit unendlich starren Bauelementen, wobei die Hertzsche Pressung lediglich Nachgiebigkeit in der Kontaktzone voraussetzt, aber den Schmiegeprozeß zwischen Bolzen und Lasche unter Spiel nicht richtig wiedergibt. Die Berechnung der maximalen Spannung in der Lasche berücksichtigt sowohl die Wangenbiegung als auch die Kerbwirkung der Lasteinleitung und gilt für kleine Bolzenspiele. Sie kann durch die Wahl der Geometrie,

insbesondere die Wahl der Kopfhöhe h beeinflusst werden (Bild 1.3) /5 bis 7/. Untersuchungen zum Einfluß des Bolzenspiels ergeben folgende zusätzliche Hinweise /8,9/:

- Mit größer werdendem Spiel zwischen Bolzen und Bohrung steigt die Spannungsüberhöhung an, der Kontaktwinkel zwischen Bolzen und Bohrungsrand ist klein.
- Bei spielbehafteten Bolzen

nähern sich die Spannungen mit steigender Last den Spannungen bei anliegenden Bolzen.

Aus dem elastischen Zusammenspiel zwischen Lasche und Bolzen entstehen Verschiebungen im Bohrungsrand. In Abhängigkeit vom Einsatzfall kommen radiale und tangentielle Relativbewegungen hinzu. Häufige Lastwechsel können dabei durch Bildung von Reibkorrosion eine weitere Grenze der Tragfähigkeit bilden. Insbesondere in der Kettenforschung gibt es hierbei Untersuchungen zu Lebensdauer und Verschleiß, die auf der Basis einfachster mechanischer Grundgleichungen empirische Kennwerte verwenden, die aber in der Literatur zum Teil widersprüchlich sind und zusätzliche betriebliche Erfahrungen verlangen.

Die komplexe Geometrie der Laschenquerschnitte und die Kopplung der Lasteinleitung von der Verformung der beteiligten Elemente bei großer Abhängigkeit vom Bolzenspiel lassen die in der Literatur angewendeten Ansätze nur bei sehr großen Vereinfachungen oder in Sonderfällen zu. Für den sehr wichtigen Sonderfall einer schenkellosen Öse unter Punktlast gelang Göldner /10/ ein Ansatz für die vollständige Beschreibung des ebenen Spannungsfeldes in Öse und Querschnitt, der auch nach neueren Forschungen gute Übereinstimmung mit experimentellen Erfahrungen zeigt. Grundlage ist ein durch eine Einzelkraft belasteter Kreisbogenträger konstanten Querschnitts, für den eine Airy'sche Spannungsfunktion angesetzt wird, die bei entsprechend zu wählenden Randbedingungen auch geschlossen lösbar ist. Wesentliches Ergebnis ist eine Dominanz der Tangentialspannungen am Bohrungsinnenrand der Lasche, Radialspannungen und Schubspannungen sind dagegen zumindest am Bohrungsinnenrand vernachlässigbar.

Póczy /11/ liefert hierzu eine Erweiterung, die auch exzentrische Laschenbohrungen und damit eine Berücksichtigung des Einflusses der Kopfhöhe  $h$  erlaubt. Der Ansatz gelingt durch Einführung eines vom Laschenwinkel abhängigen Trägheitsmoments des Laschenkopfs und führt zu Lösungen, die sich mit experimentellen Untersuchungen sehr gut decken. Beide Ansätze beruhen auf einer strikten ebenen Betrachtungsweise, auf einer punktförmigen Lasteinleitung und auf dem Prinzip des Kreisbogenträgers.

**2. Allgemeiner Berechnungsansatz, Parameterbetrachtung**

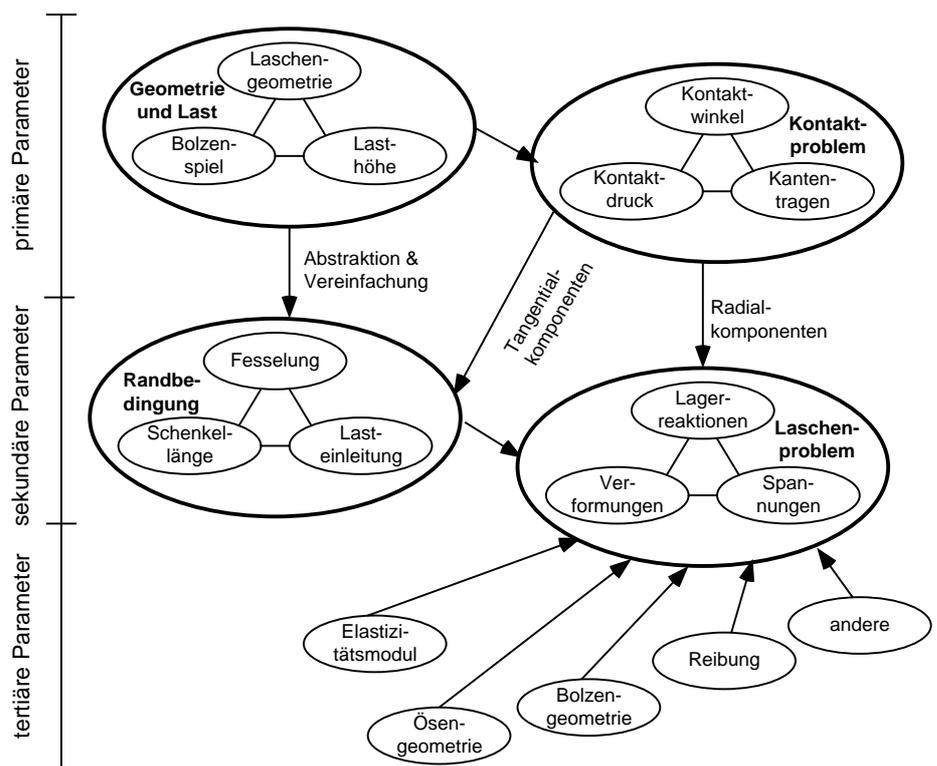
Eine analytische Lösung des dreidimensionalen Spannungszustandes stößt aufgrund der konstruktiven Bedingungen auf unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten. Im folgenden soll daher nach Ansätzen gesucht werden, die unter vertretbaren Vereinfachungen und Annahmen eine für technische Zwecke hinreichend genaue Lösung nach folgender Vorgehensweise ermöglichen:

- Die Konstruktionsteile der Verbindung werden auf die drei idealisierten Tragwerke Balken, Platte und Schale zurückgeführt, deren Deformationszustand hinreichend genau durch das Verhalten einer charakteristischen Fläche im Tragwerk beschrieben werden kann.
- Das Problem wird in die beiden Schnittebenen quer und (je nach Schnittwinkel) längs bzw. horizontal zerlegt und die Einzelergebnisse superponiert. Vereinfachend wirkt die Tatsache, daß durch den symmetrischen Aufbau von Verbindung und Belastung die Verbindung als Ganzes biege- und torsionsfrei belastet ist.
- Das Problem der Koppung von Verformung und Belastungsfunktion an der Kontaktstelle wird dadurch umgangen, daß der Schmiegeprozeß zwischen Bolzen und Lasche in getrennten Untersuchun-

gen ermittelt wird und daraus Klassen typischer Belastungsfunktionen ermittelt werden.

Zu beachten ist dabei, daß die von der Verformung abhängigen Kontaktverhältnisse Probleme darstellen, die mit linearen Berechnungsansätzen nicht oder nur in engen Bereichen erfaßbar sind.

Die Schlüsselbetrachtung für die Entwicklung eines neuartigen Ansatzes liegt in einer Analyse der das System beeinflussenden Parameter und ihre Wichtigkeit bezüglich des Berechnungsergebnisses in der Kontaktzone ("Kontaktproblem") und bezüglich der Beanspruchungen und Verformungen der Lasche ("Laschenproblem"). **Bild 2.1** zeigt in einer qualitativen Betrachtung die zu untersuchenden Parameter und ihre Zuordnung zu den Problembereichen eines mechanischen Ansatzes. So ist beispielsweise die Festlegung der Randbedingungen für die Berechnung der Beanspruchungen und Verformungen in der Lasche in erster Linie abhängig von den als Primärparameter bezeichneten Bedingungen Last und Verbindungsgeometrie, daneben spielen die aus einer Betrachtung des Kontaktbereiches zu ermittelnden Belastungsfunktionen und die das Verformungsverhalten der Elemente selbst beschreibenden Parameter (Fesselung und Schenkellänge) eine Rolle. Dagegen ist zu erwarten, daß zur Bestimmung der Kontaktdruckverteilung Fragen der Beanspruchun-



**Bild 2.1** Struktur der Parameter zur Berechnung von Bolzen-Lasche-Verbindungen

gen und der örtlichen Verformungen in den Laschen eine weniger bedeutende Rolle einnehmen.

Die Analyse der Parameter wurde in einer aufwendigen Untersuchung mit Hilfe des FE-System MARC durchgeführt, das die Modellierung des Kontaktbereiches mit lastabhängiger Kontaktfläche unterstützt. Auf diese Weise gelingt zunächst eine Klassierung der Parameter hinsichtlich ihrer Bedeutung auf das Ergebnis unabhängig oder in Verbindung mit anderen Parametern. In **Tab. 2.1** werden die Einflußgrößen einer Laschenverbindung für 3 Kategorien bewertet. Jeder Parameter beeinflusst nicht nur unmittelbar die Beanspruchungen im Bauteil (Bedeutung), sondern wiederum andere Einflußgrößen (Verknüpfung). Hinzu kommt die Komplexität der Einflußgröße. So wird z.B. die Bedeutung der Fesselung von der Schenkellänge beeinflusst, die Schenkellänge wiederum ist leichter zu beschreiben als die Laschenform. Die in Tab. 2.1 dargestellte Beurteilung der Parameter stellt das Ergebnis aus ca. 3000 FEM-Rechenläufen dar. Die hohe Zahl dieser Rechenläufe ergibt sich nicht zuletzt aus der Tatsache, daß eine unabhängige Betrachtung der Parameter mit anschließender Superposition der Einzelergebnisse aufgrund des komplexen Parameterverhaltens nicht möglich sind. Die Ergebnisse der Tabelle sollen kurz kommentiert werden:

*Primär beeinflussende Parameter:* Die in dieser Kategorie erfaßten Größen sind für die Beanspruchung im Kontaktbereich und in der Verbindung von großer Bedeutung und weisen zusätzlich eine hohe Verknüpfung auf, die die Superposition der einzelnen Einflußgrößen nicht erlaubt. Zu ihnen gehören die Laschengeometrie, das Bolzenspiel und die Lasthöhe. Beispielsweise läßt sich bei zunehmender Last eine spielbehaftete Schenkellasche leichter als der steife-

re Augenstab an den Bolzen anschmiegen. Daraus folgt, daß eine für die Auslegung zu formulierende Beziehung zwischen Lasthöhe, Bolzenspiel und Kontaktbreite nicht auf andere Laschenformen übertragen werden kann. Die genannten drei Parameter dienen unmittelbar zur Lösung des Kontaktproblems (Berechnung von Kontaktwinkel, Kontaktdruck, Kantentragen) und beeinflussen erheblich die Randbedingungen, die bei der Bildung des mechanischen Ersatzmodelles zur Berechnung von Spannungen und Verformungen in der Lasche benötigt werden.

*Sekundär beeinflussende Parameter:* Hierunter sind im wesentlichen die Angaben zu verstehen, die als Eingangsgrößen für die Beanspruchungsanalyse dienen. Obgleich sie die Höhe der berechneten Beanspruchungen entscheidend mitbestimmen, besitzen sie gegenüber den primär beeinflussenden Parametern eine verminderte Verknüpfung. Damit ist eine Superposition dieser Parametereinflüsse eher möglich als bei den primär beeinflussenden Parametern.

*Tertiär beeinflussende Parameter:* Der Einfluß dieser Parameter ist zwar nicht zu vernachlässigen, die gegenüber den anderen Einflußgrößen wesentlich niedrigere Komplexität erlaubt jedoch oft eine Superposition ihrer Einflüsse ähnlich den bekannten Korrekturfaktoren bei der Auslegung von Maschinenelementen. Typische Beispiele hierfür sind die Elastizitätsmodule von Bolzen und Lasche, die Bolzengeometrie und die Reibung.

### 3. Berechnung der Kontaktdruckverteilung in spielbehafteten Bolzenverbindungen

#### 3.1 Kontaktwinkel

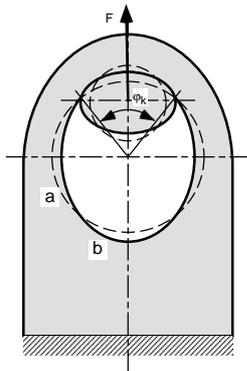
Die Bestimmung des Kontaktwinkels für eine belastete Laschenverbindung ist die Voraussetzung zur Bestimmung der in ihr herrschenden Beanspruchungen

sowohl im Quer- als auch im Längsschnitt der Verbindung. Der Kontaktwinkel stellt sich unter Last in Abhängigkeit von Kontaktdruck und Biegemoment ein. Der Kontaktdruck führt zu einer Abplattung des Bolzens und zu seiner Verformung in eine unrunde Kontur (**Bild 3.1**).

Das Biegemoment in der

Parameter	Einflußgröße	Verknüpfung	Komplexität	Bedeutung	Summe
primär	Laschenform	2	2	1	5
	Bolzenspiel	2	0	2	4
	Lasthöhe	2	0	2	4
sekundär	Lasteinleitung	1	2	1	4
	Fesselung	1	1	2	4
	Schenkellänge	1	0	2	3
tertiär	Bolzenform	0	1	1	2
	Ösenform	0	1	1	2
	Reibung	0	2	0	2
	Elastizitätsmodul	0	0	1	1

Table 2.1 Beurteilung der die Berechnung beeinflussenden Parameter nach Komplexität, Verknüpfung mit anderen Einflußgrößen und Bedeutung für die Ergebnisgüte. Bewertung: 0 klein oder nicht vorhanden, 1 mittel, 2 groß



**Bild 3.1** Bolzen- und Laschenverformung unter Last in einer spielbehaftetem Verbindung.  
a unverformt,  
b verformt

Wange bestimmt die Verformung der Lasche, wobei die Bohrung sich längt und schmaler wird. Damit ist die Ausbildung der Kontaktzone auch im linear-elastischen Verformungsbereich eine nichtlineare Beziehung in Abhängigkeit von der Lastgröße, der Geometrie und der Verformungsfähigkeit von Bolzen und Lasche. Die komplexen Verknüpfungen der Parameter lassen nur eine experimentelle oder iterative Lösungsfindung bei der Berechnung der Schmiegunz zu. Die folgenden Ergebnisse beruhen auf einer semiempirischen Auswertung zahlreicher Berechnungen mit Hilfe der FE-Methode. Die Verifizierung dieser Rechenergebnisse wurde durch Zugversuche an ausgeführten Aluminiumlaschen unternommen, wobei neben der Überprüfung der Last-Verformungs-Beziehung ein Vergleich der Spannungen mittels DMS-Meßtechnik vorgenommen wurde. Die Auswertung der Parameterrechnungen führt zu folgenden Rechenregeln und Konstruktionshinweisen:

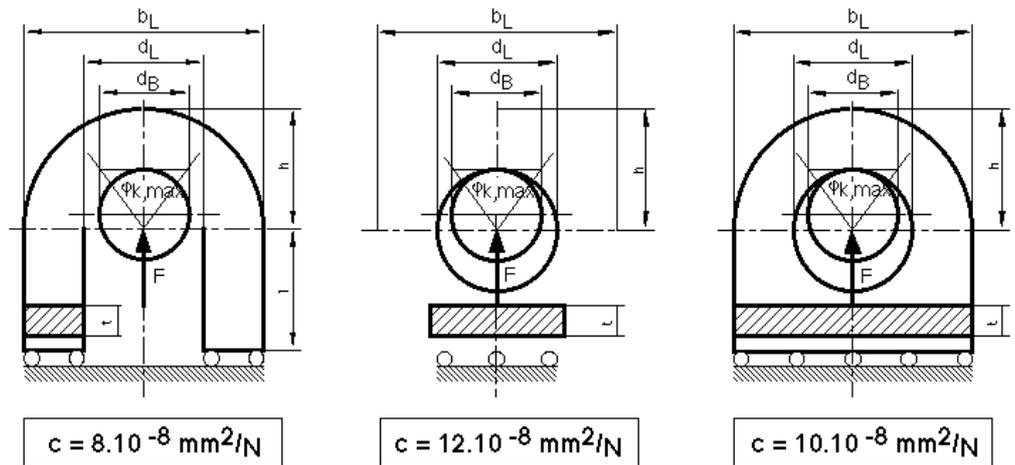
In erster Näherung läßt sich der maximale Kontaktwinkel  $\varphi_{k,max}$  durch die Projektion des Bolzens auf die Lasche abschätzen. Er beträgt

$$\varphi_{k,max} = 2 \cdot \arcsin(1-s) \quad \text{mit} \quad s = \frac{d_L - d_B}{d_L} \quad (3-1)$$

Gegen diesen Wert konvergiert der Kontaktwinkel  $\varphi_k(q,s)$  mit zunehmender Last nach folgendem semiempirischen Ansatz

$$\varphi_k(q,s) = \varphi_{k,max} \left[ 1 - e^{-\frac{c \cdot q}{s}} \right] \quad \text{mit der Lochleibung} \quad q = \frac{F}{t \cdot d_L} \quad (3-2)$$

Die mit Hilfe umfangreicher Parameterstudien und Regressionsverfahren ermittelte Konstante  $c$  ist für alle Bolzenspiele  $s \leq 10\%$  und Lasten  $q \leq 500 \text{ N/mm}^2$  mit hinreichender Genauigkeit ausschließlich von der

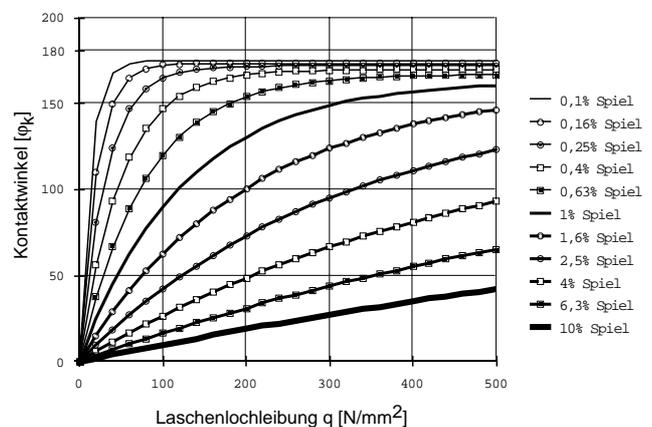


**Bild 3.2** Drei typische Formen von Bolzen-Lasche-Verbindungen mit spielbehafteten Bolzen und ihre Steifigkeiten. Links: Lasche. Mittig: Augenring. Rechts: Augenstab

Steifigkeit der Lasche abhängig. Je biegeweicher die Öse und der Schenkel sind, desto kleiner ist  $c$ . Für typische Bauformen enthält **Bild 3.2** hierzu Angaben. Der Vergleich der obigen Näherungsformel mit FE-Rechnungen weist eine befriedigende Übereinstimmung auf, selbst bei sehr kleinem Spiel und bei starker Abweichung der Laschengometrie von den in Bild 3.2 beschriebenen Verhältnissen übersteigt die Differenz nicht mehr als 10 %.

Die Auswertung der Gleichungen für unterschiedliche Lochleibungen und Bolzenspiele bei Laschen zeigt **Bild 3.3**. Parameterrechnungen ergeben bei Abweichung von den dort definierten geometrischen Beziehungen folgende Tendenzen:

- Kopfüberhöhung und Wangenverbreiterungen erhöhen den Steifigkeitsfaktor und verkleinern damit den Kontaktwinkel. Bei großem Bolzenspiel nähern sich die Verhältnisse dem der Hertzchen Pressung im Kopfbereich.
- Kopfkürzung und Wangenschwächung führen zu

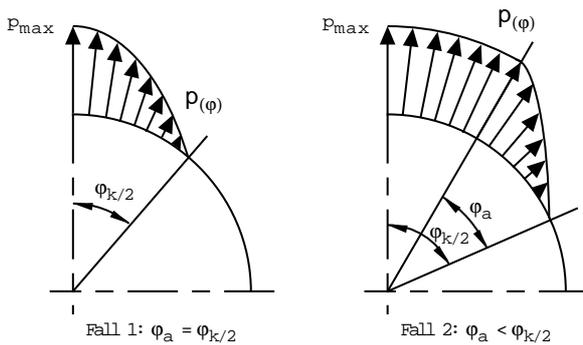


**Bild 3.3** Kontaktwinkel  $\varphi_k$  für Laschen nach Bild 3.2 links mit  $b_L/d_L = 2$  und  $d_L/d_B > 0,5$  in Abhängigkeit von Belastung und Bolzenspiel

einer Kontaktwinkelzunahme, da sich die Lasche um den Bolzen "wickeln" kann. Die Kontaktdruckverringung wird aber durch die Querschnittschwächung meist überkompensiert.

### 3.2 Kontaktdruckverteilung im Querschnitt der Verbindung

Der im Querschnitt wirkende und sich mit dem Ösenwinkel  $\varphi$  ändernde Druck  $p(\varphi)$  liegt bis zum Kontaktwinkel  $\varphi_k$  an. Die sich in der Kontaktzone einstellende Druckverteilung  $p(\varphi)$  kann nach **Bild 3.4** wie folgt beschrieben werden:



**Bild 3.4** Rechnerischer Ansatz des Kontaktdruckverlaufs im Laschenquerschnitt

Der Maximaldruck  $p_{max}$  konvergiert mit zunehmendem Kontaktwinkel  $\varphi_k$  und abnehmendem Abklingwinkel  $\varphi_a$  gegen die Lochleibung  $q$  (vgl. Bild 1.2). Die Werte für den Kontaktwinkel  $\varphi_k$  und den Abklingwinkel  $\varphi_a$  werden überwiegend über das Bolzenspiel  $s$  und die Last  $F$  bestimmt, wobei in Abhängigkeit von der Größe eine Fallunterscheidung vorzunehmen ist:

**Fall 1:  $\varphi_a = \varphi_k/2$ :** Bei großem Bolzenspiel und relativ steifer Lasche stellt sich auch unter Last nur ein kleiner Kontaktwinkel  $\varphi_k$  ein. Der Maximaldruck  $p_{max}$  ist allein vom Kontaktwinkel  $\varphi_k$  abhängig und zeigt mit guter Näherung einen cosinusförmigen Verlauf.

$$\text{für } \varphi_k < \frac{\pi}{2}: p_{max}(\varphi_k) = q \frac{1 - \left(\frac{2\varphi_k}{\pi}\right)^2}{2\varphi_k \cos \varphi_k} = \frac{q}{\cos \varphi_k} \left(\frac{\pi}{2\varphi_k} - \frac{2\varphi_k}{\pi}\right)$$

$$\text{für } \varphi_k = \frac{\pi}{2}: p_{max}(\varphi_k) = \frac{4}{\pi} q \tag{3-3}$$

$$p(\varphi) = p_{max}(\varphi_k) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\varphi}{\varphi_k}\right) \tag{3-4}$$

**Fall 2:  $\varphi_a < \varphi_k/2$ :** Bei kleinen Bolzenspielen, hohen Belastungen und verhältnismäßig nachgiebigen Laschen kommt es zu einer komplexeren Druckverteilung  $p(\varphi)$ . An einen Sektor mit nahezu konstantem Druck  $p_{max}$  schließt sich ein zweiter an, dessen Breite durch den Abklingwinkel  $\varphi_a$  definiert wird und in dem der Druck bis zum Kontaktwinkel  $\varphi_k/2$  auf Null abfällt. Für diesen Fall ergibt sich der Maximaldruck  $p_{max}$  in Abhängigkeit vom Kontaktwinkel  $\varphi_k$  und vom Abklingwinkel  $\varphi_a$  zu

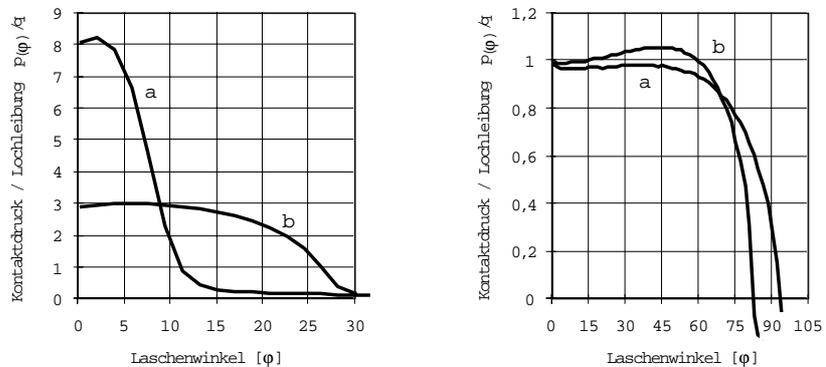
$$p_{max}(\varphi_k, \varphi_a) = q \frac{1 - \left(\frac{2\varphi_a}{\pi}\right)^2}{2\varphi_a \cos \varphi_k + \sin(\varphi_k - \varphi_a)} \tag{3-5}$$

Bei der Berechnung der Druckverteilung  $p(\varphi)$  muß in Abhängigkeit vom Abklingwinkel für die beiden Sektoren unterschieden werden.

$$\text{für } \varphi \leq \varphi_k - \varphi_a: p_a(\varphi) = p_{max}(\varphi_k, \varphi_a) \tag{3-6}$$

$$\text{für } \varphi > \varphi_k - \varphi_a: p_b(\varphi) = p_{max}(\varphi_k, \varphi_a) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\varphi + \varphi_a - \varphi_k}{\varphi_a}\right)$$

Die Auswertung dieser Gleichungen ergibt eine erhebliche Abhängigkeit der Druckverteilung vom Spiel. Während große Spiele eng begrenzte Kon-



**Bild 3.5** Kontaktdruckverteilung in Bolzen-Lasche-Verbindungen, ermittelt mit FEM. Links: Großes Spiel, a = 10%, b = 2%. Rechts: Kleines Spiel, a = 0%, b = 0,2%

taktbreiten und Lastüberhöhungen bis zum Achtfachen des Lochleibungsdrucks verursachen (**Bild 3.5 links**), nähert sich bei Spielen, wie sie im Bereich von Bolzengelenken und -ketten zu finden sind, die Lastverteilung im Idealfall der Lochleibung (**Bild 3.5 rechts**).

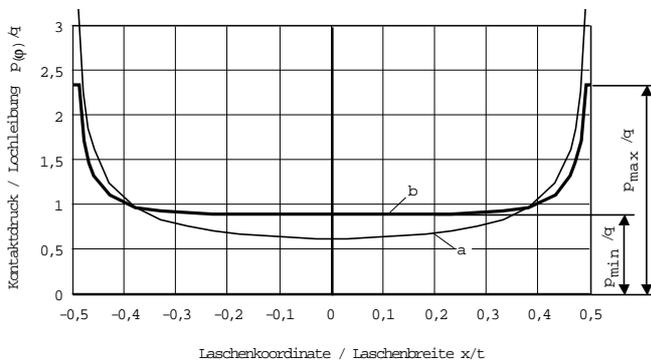
### 3.3 Kontaktdruckverteilung im Längsschnitt

Die durch starke Überhöhungen am Laschenrand gekennzeichnete Kontaktdruckverteilung über der Laschenbreite wurde bereits von /10/ analytisch untersucht, wobei als mechanisches Modell ein starrer

Stempel diente, der in eine elastische Halbebene gedrückt wird. Die dabei entwickelte Gleichung wurde einem Vergleich mit FE-Rechnungen unterzogen und dabei festgestellt, daß die Annahme eines starren Stempels dem Verformungsverhalten der an der Verbindung beteiligten Elemente nicht gerecht wird und zu rechnerischen Überhöhungen der Kantenpressungen führt. Als recht gute Näherungslösung für Bolzengelenke und -ketten hat sich im Vergleich mit zahlreichen FEM-Rechnungen eine semiempirische Erweiterung der von /10/ entwickelten Gleichung erwiesen.

(3-7)

$$p(\varphi, x) = p(\varphi) \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{p \sqrt{1 - 4(x/t)^2}} \{1 - 2(x/t)^2\} \quad \text{mit} \quad -\frac{t}{2} \leq x \leq \frac{t}{2}$$



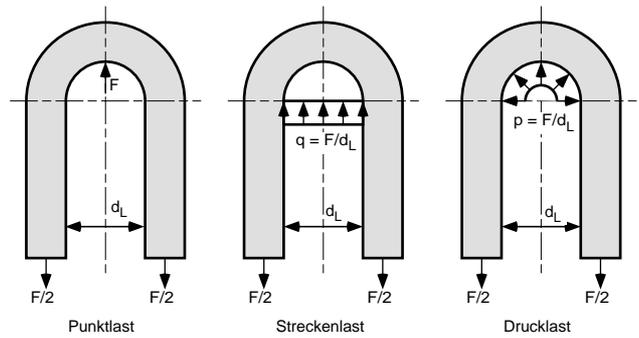
**Bild 3.6** Druckverteilung in Längsrichtung einer Lasche mit Rechteckprofil. a Lösung nach /10/, b Lösung nach Glg. 3-7

Das Druckminimum liegt bei etwa 90% des mittleren Wertes. Auch bei dieser Formel ergeben sich wie bei der Originalgleichung am Laschenrand unendlich hohe Spannungen. Da die sich hier einstellenden plastischen Zonen meist nur eine kleine Breite haben, ist es zulässig, sie in Höhe der Fließgrenze  $R_{eH}$  zu kappen. **Bild 3.6** zeigt die Kontaktdruckverteilung bei einem Verhältnis  $R_{eH}/q = 2,35$ .

#### 4. Berechnung der Beanspruchungen in der Lasche

##### 4.1 Lasteinleitung unter Berücksichtigung der Elastizität von Bolzen und Lasche

Eines der Kernprobleme bei der Aufstellung des mechanischen Modells ist die Berücksichtigung der Elastizität von Bolzen und Laschen. Parameterrechnungen mit der Methode der Finiten Elemente ergaben, daß eine falsche Einschätzung der Bolzenelastizität zu unrealistischen Kontaktzonen führt, daß diese Fehleinschätzungen in der Lasteinleitung jedoch die von der



**Bild 4.1** Varianten der Lasteinleitung bei der Laschenberechnung

Lasteinleitungszone weiter entfernten Bereiche nicht sehr stark beeinflussen. Zur Berechnung des Laschenverhaltens können folgende Lasteinleitungsvarianten gewählt werden (**Bild 4.1**):

- Punktförmige Lasteinleitung für Laschen mit großem Bolzenspiel.
- Streckenförmige Lasteinleitung für Laschen mit kleinem Bolzenspiel.
- Druckförmige Lasteinleitung für Laschen mit keinem oder kleinstem Bolzenspiel.

Bei Laschen mit großem Bolzenspiel führt die Annahme der punktförmigen Last bei der analytischen Rechnung zu einer Singularität. Bei kleinem Bolzenspiel liegt die Streckenlast (Lochleibung) auf der sicheren Seite der Rechnung, die druckförmige Belastung wird den numerisch und experimentell ermittelten Werten eher gerecht.

Die für die Festlegung der Randbedingungen im mechanischen Ansatz wichtigsten Fesselungsfälle sind in **Bild 4.2** dargestellt. Zur Beeinflussung des Kontaktverhaltens durch die Fesselung der Lasche (und damit zur Wahl des Lasteinleitungsfalles für die Be-

Nummer Randbedingung	Fesselungsfall			
	1 Enden frei	2 Enden verdrehbar	3 Enden verschiebbar	4 Enden eingespannt
Öse				
Lasche				
Translation Rotation	gegeben: $F_q$ gesucht: $\delta$ gegeben: $M_b$ gesucht: $\beta$	gegeben: $\delta$ gesucht: $F_q$ gegeben: $M_b$ gesucht: $\beta$	gegeben: $F_q$ gesucht: $\delta$ gegeben: $\beta$ gesucht: $M_b$	gegeben: $\delta$ gesucht: $F_q$ gegeben: $\beta$ gesucht: $M_b$

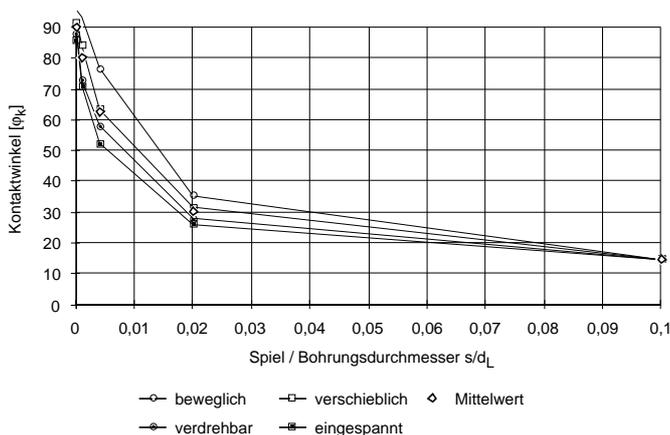
**Bild 4.2** Wahl der Randbedingungen bei der Laschenberechnung

rechnung) konnte anhand vergleichender FEM-Rechnungen festgestellt werden:

- Je größer das Bolzenspiel ist, desto geringeren Einfluß hat die Fesselungsvariante auf den Kontaktwinkel.
- Je kleiner das Bolzenspiel ist, desto größeren Einfluß hat die Fesselungsvariante auf den Kontaktwinkel.
- Je härter die Einspannbedingung ist, desto kleiner ist der Kontaktwinkel. Die in Bild 4.2 gezeigten Fesselungsfälle zeigen mit aufsteigender Nummer eine größere "Härte" der Einspannbedingung.

**Bild 4.3** zeigt aus einer Reihe von FE-Rechnungen die Kontaktwinkel bei unterschiedlicher Fesselung über das Bolzenspiel aufgetragen. Von wesentlich geringerem Einfluß auf die Kontaktzone und damit auch auf die Beanspruchungen im Laschenkopf ergab sich nach FEM-Parameterrechnungen der Einfluß der Schenkellänge. Lediglich sehr kurze Schenkellängen zeigten Ergebnisse, die den Bedingungen harter Einspannung vergleichbar sind.

**Bild 4.4 bis 4.6** stellen die Ergebnisse der durchgeführten numerischen Berechnungen und den Vergleich mit den Ansätzen nach Bild 4.1 in übersichtlicher Form dar. Aufgetragen ist die maximale Tangentialspannung im Wangenquerschnitt. "Punkt-



**Bild 4.3** Kontaktwinkel bei unterschiedlicher Fesselung und Bolzenspiel

last, Streckenlast und Drucklast" bezeichnen Ergebnisse aus den im folgenden vorgestellten analytisch berechneten Modellen, die mit Spielangaben versehenen Darstellungen sind Ergebnisse von FEM-Rechnungen. Die Darstellungen sollen eine Hilfe für die Wahl des entsprechenden Ansatzes bei analytischer Berechnung geben.

Variationen der Bolzen- und Ösenform haben gegenüber den bisher genannten Parametern einen wesentlich geringeren Einfluß. Die Erhöhung der Nachgiebigkeit dieser Elemente bewirkt grundsätzlich bei geringen Bolzenspielen eine Erhöhung der Kontaktwinkel, was sich aber in der Ausbildung der Beanspruchungen nicht sonderlich bemerkbar macht. Auch die Verwendung unterschiedlicher Werkstoffe (z.B. Aluminiumlasche und Stahlbolzen) führt zwar zu einer Veränderung der Kontaktwinkel, die aber nicht wesentlich für das Beanspruchungs- und Verformungsverhalten ist. Da der Kontaktwinkel bei weicherem Material größer wird, nimmt die Biegespannung in der Wange ab, so daß eine Berechnung für Stahl bei den Spannungen zu höheren Werten führt und damit auf der sicheren Seite liegt.

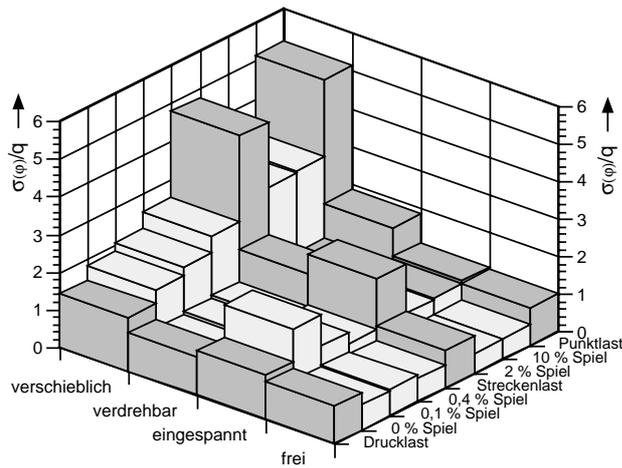
## 4.2 Mechanischer Berechnungsansatz

Die durchgeführten parametrischen Untersuchungen erlauben Vereinfachungen, die es gestatten, das Gesamtproblem der dreidimensional gestalteten und beanspruchten Verbindung in Teilprobleme aufzuteilen und ohne große Fehler zur Gesamtlösung zu superpositionieren:

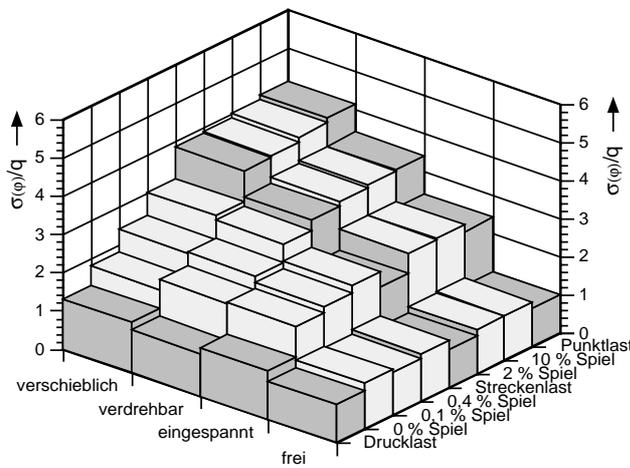
- Aufteilung des dreidimensionalen Bauteils in den Querschnitt und in den Längsschnitt. Unter dem Querschnitt wird die Ansicht senkrecht, unter dem Längsschnitt wird die Ansicht parallel zur Bolzenachse verstanden (vergl. Bild 1.1).
- Im Querschnitt liegt in der Kontaktzone in erster Näherung ein Normalspannungszustand vor. Dadurch lassen sich die beiden Hauptspannungen getrennt als Radial- und Tangentialspannung berechnen.
- Die für den Querschnitt ermittelten Radialspannungen werden im Längsschnitt durch den Effekt des Kantentrags bzw. der Bolzenbiegung überlagert.

Während der Erprobungsphase der analytischen Berechnungen zeigte sich, daß die Annahme und Abschätzung der zu treffenden Randbedingungen eine dominierende Bedeutung für die Ergebnislösung haben. Die Fehler, die durch eine Reihe mechanischer Vereinfachungen gemacht werden, sind wesentlich geringer als die Fehler, die durch eine falsche Lagerung verursacht werden.

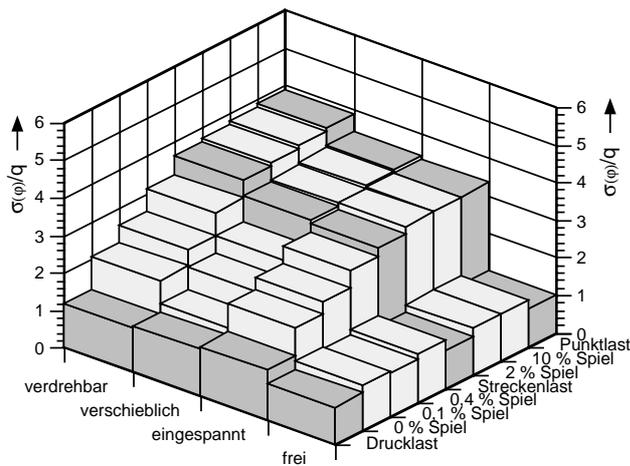
Als Ansatz zur Bauteilbeschreibung wird für den gebogenen Teil der Lasche (im folgenden Öse genannt), das mechanische Modell eines stark ge-



**Bild 4.4** Vergleich der maximalen Tangentialspannung im Wangenquerschnitt für eine Lasche mit dem Schenkelverhältnis  $l/r = 0$



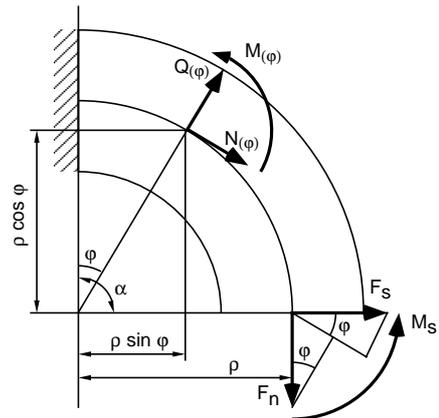
**Bild 4.5** Vergleich der maximalen Tangentialspannung im Wangenquerschnitt für eine Lasche mit dem Schenkelverhältnis  $l/r = 1$



**Bild 4.6** Vergleich der maximalen Tangentialspannung im Wangenquerschnitt für eine Lasche mit dem Schenkelverhältnis  $l/r = 2$

krümmten Balkens gewählt (**Bild 4.7**). An diesen schließt sich optional ein Schenkel an. Die Querschnitte sind zur Biegungsebene symmetrisch (ge-

rade Biegung), die Querschnitte stehen vor und nach der Belastung senkrecht zur neutralen Faser (Bernoulli-Hypothese).



**Bild 4.7** Mechanisches Ersatzbild einer punktförmig belasteten Öse

Nach den Grundgleichungen für den Balken /12,13/ läßt sich die im Balkenquerschnitt herrschende Spannung beschreiben durch

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_b$$

mit  $\sigma_z = \frac{F_n}{A_L}$  (4-1)

und  $\sigma_b = \frac{M_b}{A_L \rho} \left( 1 + \frac{A_L \rho^2}{J} \frac{\eta}{\rho + \eta} \right)$

Die für die Berechnung der Querschnittsfläche  $A$  und das Trägheitsmoment  $J$  für gekrümmte Stäbe geltenden Formeln für einige wichtige Querschnitte enthält **Bild 4.8**. Im folgenden soll das Berechnungsverfahren am Beispiel der punktförmigen Lasteinleitung vorgestellt werden, die anderen Lastmodelle berechnen sich analog und sind im Anschluß an die Entwicklung in ihren Ergebnissen tabellarisch aufgeführt.

Für die punktförmig belastete Öse nach Bild 4.7 lassen sich unabhängig von der Fesselung die Schnittgrößen ermitteln zu

$$N(\varphi) = F_n \sin \varphi + F_s \cos \varphi$$

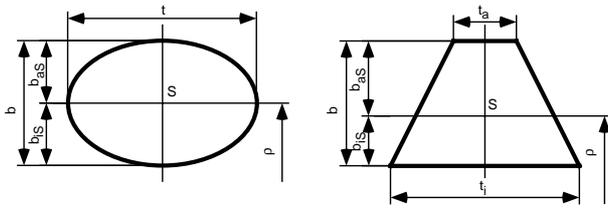
$$M(\varphi) = F_n \rho (1 - \sin \varphi) - F_s \rho \cos \varphi - M_s \quad (4-2)$$

Die Verzerrung an einem beliebigen Ort der Öse ergibt sich nach /13/ zu

$$\gamma_o = \frac{N(\varphi) + \frac{M(\varphi) \kappa + 1}{\rho \kappa}}{A_L E}$$

$$= \frac{F_n \rho (1 + \kappa - \sin \varphi) - F_s \rho \cos \varphi - M_s (1 + \kappa)}{A_L E \kappa \rho} \quad (4-3)$$

mit  $\kappa = \frac{J}{A_L \rho^2}$



Form	Querschnitt	Trägheitsmoment
allgemein	$A_L = \int_{b_1}^{b_2} t(\eta) d\eta$	$J_L = \int_{b_1}^{b_2} t(\eta) \frac{\eta^2}{1 + \frac{\eta}{\rho}} d\eta$
Ellipse	$A_E = \pi r t$ mit $r = \frac{b}{2}$	$J_E = \pi r t \rho^2 \left\{ 2 \frac{\rho}{r} \left[ \frac{\rho}{r} - \sqrt{\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 1} \right] - 1 \right\}$
Kreis	$A_K = \pi r^2$ mit $r = \frac{b}{2}$	$J_K = \pi r^2 \rho^2 \left\{ 2 \frac{\rho}{r} \left[ \frac{\rho}{r} - \sqrt{\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 1} \right] - 1 \right\}$
Trapez	$A_T = b \frac{t_i + t_a}{2}$	$J_T = \frac{\rho^5}{b} \left\{ \frac{t_a - t_i}{\rho} \left( \frac{b}{\rho} - \frac{b_{as}^2 - b_{is}^2}{2\rho^2} + \frac{b_{as}^3 - b_{is}^3}{3\rho^3} \right) - \frac{t_{sr}}{\rho} \frac{b}{\rho} \left( \frac{b}{\rho} - \frac{b_{as}^2 - b_{is}^2}{2\rho^2} \right) + \left( \frac{t_a - t_i}{\rho} - \frac{b t_{sr}}{\rho} \right) \ln \frac{1 + \frac{b_{1r}}{\rho}}{1 + \frac{b_{2r}}{\rho}} \right\}$ <p>mit</p> $t_{sr} = \frac{2 t_i^2 + t_i t_a + t_a^2}{3(t_i + t_a)}$ $b_{1r} = -b \frac{t_i + 2t_a}{3(t_i + t_a)}$ $b_{2r} = b \frac{2t_i + t_a}{3(t_i + t_a)}$
Rechteck	$A_R = b t$	$J_R = \rho^4 \frac{t}{\rho} \left\{ \ln \frac{1 + \frac{b}{2\rho}}{1 - \frac{b}{2\rho}} - \frac{b}{\rho} \right\}$
Dreieck	$A_D = b \frac{t}{2}$	$J_R = \rho^4 \frac{t}{\rho} \left\{ \ln \frac{1 + \frac{b}{2\rho}}{1 - \frac{b}{2\rho}} - \frac{b}{\rho} \right\}$

Bild 4.8 Formeln zur Berechnung der Querschnittsfläche A und des Trägheitsmoments J für gekrümmte Stäbe

Der Verdrehungswinkel der Ösenenden  $\beta_0$  ergibt sich durch Integration der Ösenverzerrung  $\gamma_0$  über den gesamten Ösenwinkel  $\alpha$ . Da der Ösenwinkel in Bild 4.7 im Uhrzeigersinn verläuft (mathematisch negativ) muß eine Vorzeichenkorrektur vorgenommen werden.

$$\beta_0 = - \int_0^\alpha \gamma_0 d\varphi \tag{4-4}$$

$$= \frac{F_n \rho [1 - \alpha (1 + \kappa) - \cos \alpha] + F_s \rho \sin \alpha + M_s \alpha (1 + \kappa)}{A_L E \kappa \rho}$$

Die Verschiebung der Ösenenden  $\delta_0$  addiert sich aus zwei Komponenten  $\delta_{01}$  und  $\delta_{02}$  (Bild 4.9). Die

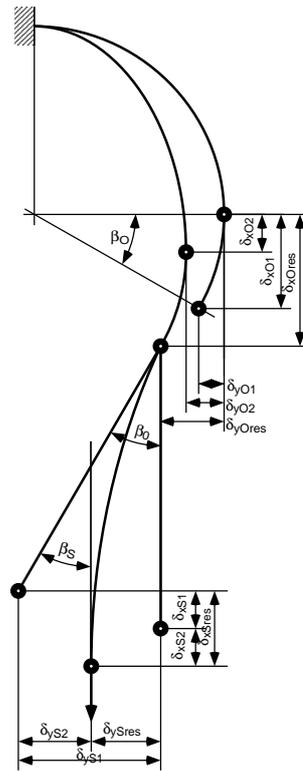


Bild 4.9 Mechanisches Rsatzbild einer Lasche mit punktförmiger Lastenleitung zur Berechnung der Verformungen

erste berücksichtigt die Verdrehung der Ösenenden

$$\delta_{01} = \beta_0 \rho \cos \alpha \tag{4-5}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{A_L E \kappa} \{ F_n \rho [1 - \alpha (1 + \kappa) - \cos \alpha] + F_s \rho \sin \alpha + M_s \alpha (1 + \kappa) \}$$

Die zweite Komponente erfaßt den Einfluß des in der Öse wirkenden Biegemomentes  $M_0$ .

$$\delta_{02} = - \frac{1}{E A \kappa} \int_0^\alpha M(\varphi) \cos \varphi d\varphi \tag{4-6}$$

$$= \frac{F_n \rho (1 - 2 \sin \alpha - \cos^2 \alpha) + F_s \rho (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) + 2 M_s \sin \alpha}{2 A_L E \kappa}$$

Hieraus ergibt sich die resultierende Ösenverschiebung:

$$\delta_0 = \delta_{01} = \delta_{02} \tag{4-7}$$

Schließt sich an die Öse ein Schenkel der Länge l an, so werden die Belastungen  $F_s$  und  $M_s$  zu den Schnittgrößen zwischen Öse und Schenkel. Dabei muß beachtet werden, daß sich das Moment  $M_s$  aus den am Schenkelende angreifenden Lasten  $F_q$  und  $M_b$  errechnet zu

$$F_s = F_q \tag{4-8}$$

$$M_s = M_b + F_q l$$

Die Verdrehung der Lasche läßt sich aus der bekannten Balkenbiegungsformel berechnen

$$\beta_s = \frac{l}{2EJ} (F_q l + 2M_b) \quad (4-9)$$

Die resultierende Verdrehung der Laschenenden ergibt sich aus der Addition der Einzelverdrehungen von Öse und Schenkel. Unter Berücksichtigung der Übergangsbedingungen für  $F_s$  und  $M_s$  gilt

$$\beta_L = \beta_o + \beta_s \quad (4-10)$$

Fesselungsfall Bild 4.2	Laschenende	Lagerreaktionen
1	frei beweglich	$F_q = 0$ $M_b = 0$
2	verdrehbar nicht verschiebar	$F_{q,90^\circ} = 6F_n J \rho \frac{\rho + l [\pi(1+\kappa) - 2]}{3J [\pi\rho^2 + 8\rho l + 2l^2 \pi(1+\kappa)] + 4A_L \kappa \rho l^3}$ $M_b = 0$
3	verschiebar nicht verdrehbar	$F_{q,90^\circ} = 0$ $M_{b,90^\circ} = F_n J \rho \frac{\pi(1+\kappa) - 2}{J \pi(1+\kappa) + 2A_L \kappa \rho l}$
4	eingespannt	$F_{q,90^\circ} = 6F_n J \rho l \frac{J \left\langle 2 - \frac{\pi}{2}(1+\kappa) \right\rangle + A_L l \kappa \left\langle l \left[ \frac{\pi}{2}(1+\kappa) - 1 \right] + \rho \right\rangle}{6J^2 \rho \left[ \frac{\pi^2}{4}(1+\kappa) - 2 \right] + 2A_L J \kappa l \left[ \pi^2(1+\kappa) + 6l\rho + \frac{3\pi}{2}\rho^2 \right] + A_L^2 \kappa^2 l^4 \rho}$ $M_{b,90^\circ} = F_n J \rho l \frac{6J \left\langle l \left[ 2 - \frac{\pi}{2}(1+\kappa) \right] + \rho \left\langle \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{\pi}{2}(1+\kappa) \right] + 1 \right\rangle \right\rangle + A_L l^2 \left\langle 2\kappa l \left[ \frac{\pi}{2}(1+\kappa) - 1 \right] + 3\kappa\rho \right\rangle}{6J^2 \rho \left[ \frac{\pi^2}{4}(1+\kappa) - 2 \right] + 2J A_L \kappa l \left[ \pi^2(1+\kappa) + 6l\rho + \frac{3\pi}{2}\rho^2 \right] + A_L^2 \kappa^2 l^4 \rho}$

Die Verschiebung der Laschenenden setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Die erste berücksichtigt die Verschiebung, die sich durch die Verdrehung der Ösenenden ergibt

$$\delta_{s1} = l \beta_o = \frac{l}{A_L E \kappa r} \left\{ \begin{array}{l} F_n r [1 - \alpha(1+\kappa) - \cos \alpha] \\ + F_s r \sin \phi + M_s \alpha(1+\kappa) \end{array} \right\} \quad (4-11)$$

Die andere Komponente ist durch die Balkenbiegungsformel unter Einzellast und Biegemoment bekannt.

$$\delta_{s2} = \frac{l^2}{6EJ} (2F_q l + 3M_b) \quad (4-12)$$

Daraus ergibt sich durch Addition

$$\delta_s = \delta_{s1} + \delta_{s2} \quad (4-13)$$

Und die resultierende Verschiebung entsteht durch Superposition der einzelnen Einflüsse.

$$\delta_L = \delta_o + \delta_s \quad (4-14)$$

Die diesem Lastfall zugeordneten Lagerreaktionen gemäß Bild 4.2 sind in **Tab. 4.1** aufgeführt. Die Formeln darin gelten für Laschen, deren Schenkel parallel verlaufen und bei denen sich infolge des mathematisch einfach zu handhabenden Ösenwinkels  $\alpha = \pi/2$  vereinfachte Gleichungen ergeben.

Die Gleichungssätze zur Berechnung aller Lastfälle gemäß Bild 4.1 und aller Fesselungsfälle gemäß Bild 4.2 sind als **Anhang** zusammenfassend tabellarisch aufgeführt.

Als Ergebnis zu diesen Berechnungen zeigt **Bild**

**4.10** die Verformungen der Schwerpunktlinie für eine Rechteck-Profillasche bei unterschiedlichen Lagerbedingungen und punktförmiger Lasteinleitung am Ösenkopf. Man erkennt beispielsweise, daß die Unterdrückung des Rotationsfreiheitsgrades im gesamten Bauteil zu wesentlich kleineren Verformungen führt, diese Verformungsbehinderung jedoch größere Spannungen erwarten läßt. Die fest eingespannte Lasche besitzt zwei Wendepunkte, an denen der Verformungsgradient sein Vorzeichen ändert. Die verdrehbare und verschiebliche Lasche weisen nur einen, die frei bewegliche keinen Wendepunkt auf.

### 4.2.3 Beanspruchungsanalyse

Als Auswertung der oben beschriebenen Gleichungen zeigt **Bild 4.11** die Spannungsfelder unterschiedlich gefesselter Laschen mit Rechteckquerschnitt. Dargestellt sind die Linien gleicher Normalspannung  $\sigma_n$  normiert auf die Zugspannung  $\sigma_z$ .

Die Laschen, deren Rotationsfreiheitsgrad eingeschränkt sind, weisen im Schenkel die typische Spannungsverteilung eines Biegebalkens auf, während sich in den Laschen, die sich verdrehen dürfen, im Schenkel die Spannungsverteilung eines Zugstabes einstellt. Das Spannungsminimum liegt immer innen, das Spannungsmaximum immer außen am Ösenkopf, dies ist im wesentlichen durch die singuläre Lasteinleitung bedingt. Mit Ausnahme der frei beweglichen Lasche kommt es im Wangenquerschnitt zu einer zweiten Spannungsspitze an der La-

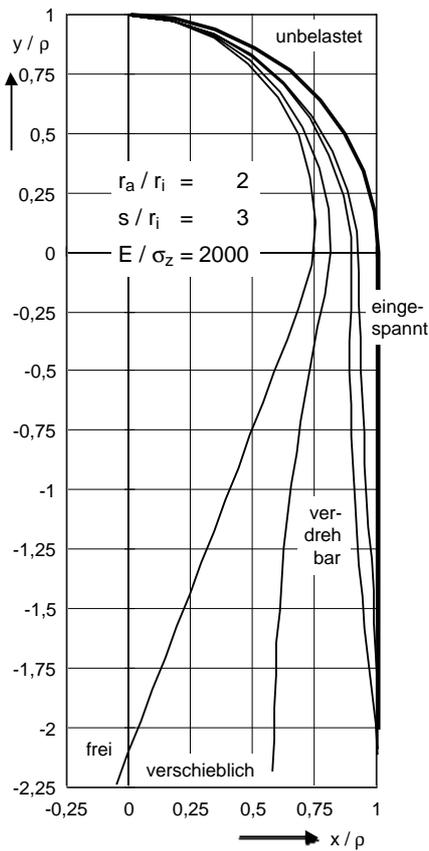


Bild 4.10 Verformungsverhalten identischer Laschen bei unterschiedlicher Einspannung (Verformungen um den Faktor 50 übertrieben dargestellt)

schenbohrung, die bei den verschiebungsbehinderten Schenkeln (Enden verdrehbar bzw. eingespannt) rund doppelt so groß ausfällt wie bei der verdrehbehinderten Geometrie (Enden verschieblich).

Der Vergleich dieser analytisch ermittelten Ergebnisse mit numerischen Berechnungen und DMS-Messungen zeigt trotz der vorgenommenen Reihe von Vereinfachungen eine erstaunlich gute Übereinstimmung. **Tabelle 4.2** und **Tabelle 4.3** beweisen anhand eines Berechnungsfalls, daß sowohl die Schnittgrößen wie auch die kritischen Tangentialspannungen an der Wangeninnenseite hinreichend genau mit dem beschriebenen Verfahren ermittelt werden können. FE-Reihenuntersuchungen zeigen ferner, daß auch Verbindungen mit wenig Spiel und dadurch überwiegend rotationssymmetrischem Spannungszustand

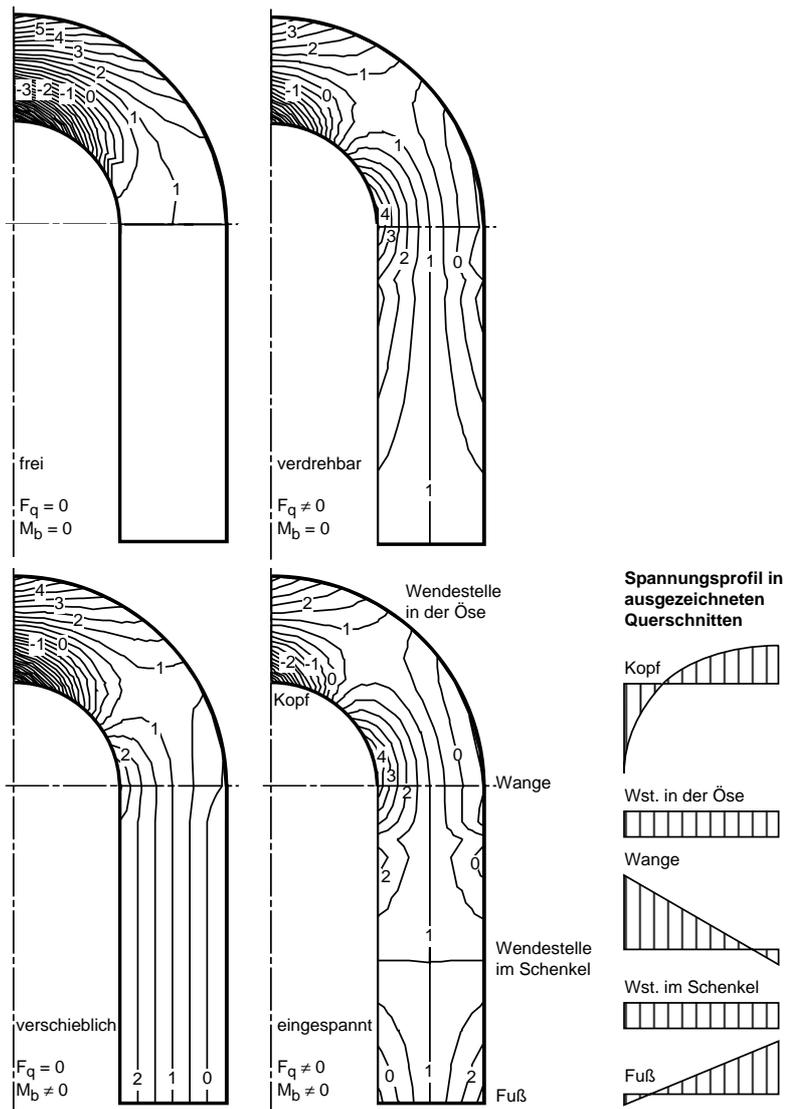


Bild 4.11 Linien gleicher Normalspannungen für unterschiedlich eingespannte Laschen

im Auge Tangentialspannungen aufweisen, die von den hier berechneten Beanspruchungsgrößen nur geringfügig abweichen. Zur Berechnung der Tangentialspannung in der Wange ist also die hier vorgestellte vereinfachte Berechnung der Lasche mit Belastung durch Einzelkraft mit ingenieurmäßiger Genauigkeit gültig und praktisch unabhängig vom Bolzenspiel.

Fessel-fall	F <sub>q</sub> [N]		M <sub>b</sub> [Nm]		β <sub>L</sub> [rad]		d <sub>L</sub> [mm]	
	analy-tisch	nume-risch	analy-tisch	nume-risch	analy-tisch	nume-risch	analy-tisch	nume-risch
1	0	0	0	0	-0,01	-0,01	-1,59	-1,58
2	623	599	0	0	0,002	0,002	0	0
3	0	0	63	60	0	0	-0,62	-0,64
4	1049	1040	-71	-74	0	0	0	0

Tabelle 4.2 Ergebnisvergleich der Lagerreaktionen für Punktlast bei unterschiedlicher Fesselung (Die FEM-Rechnungen wurden mit dem Programm ASKA durchgeführt)

Fessel-fall	$\sigma_{Wi}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		$\sigma_{Wa}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	
	analy-tisch	nume-risch	analy-tisch	nume-risch
1	100	112	100	92
2	414	381	-57	-90
3	311	295	-6	-40
4	391	362	-46	-90

Tabelle 4.3 Ergebnisvergleich der Tangentialspannungen im Wangeninnen- ( $\sigma_{Wi}$ ) und -außenquerschnitt ( $\sigma_{Wa}$ ) für Punktlast bei unterschiedlicher Fesselung. (Die FEM-Rechnungen wurden mit dem Programm MARC durchgeführt.)

Unterschiede sind dagegen bezüglich der Radialspannung zu erwarten in Laschen, bei denen der Bolzen eine flächige Auflage nach Bild 4.1 mitte und rechts hat. Der hier am besten übereinstimmende Ansatz mit vergleichenden FEM-Untersuchungen ist praktisch für den gesamten Bereich der Kontaktzone der Ansatz der Spannung in einem Rohr unter Innendruck:

$$\sigma(r, \varphi) = p \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( 1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) \quad \text{für } \varphi < \frac{\varphi_k}{2} \quad (4-15)$$

**Bild 4.12** zeigt den Radialspannungsverlauf für eine Lasche, deren Außendurchmesser dem doppelten Bohrungsdurchmesser entspricht. **Bild 4.13** stellt dies noch einmal sehr deutlich an der Auswertung einer numerischen Rechnung eines Augenstabes mit kleinem Spiel dar: Auf der linken Seite ist die Verteilung der Radialspannung unabhängig vom Laschenwinkel in der typischen Verteilung des Rohres unter Innendruck. Die auf der rechten Seite gezeigte Schubspannung kann in weiten Bereichen der Lasche vernachlässigt werden, da sowohl im Kontaktbereich als auch im Bereich der Laschenenden die Radial- und Tangentialspannungen Hauptspannungen darstellen. Lediglich in einem kleinen Sektor um das Kontaktende bildet sich ein komplexer Spannungszustand aus, der Schubspannungen etwa in Höhe von 25 % der Radialspannungen aufweist.

#### 4.2.4 Überlagerung zum mehrdimensionalen Beanspruchungszustand

Im folgenden soll versucht werden aus den

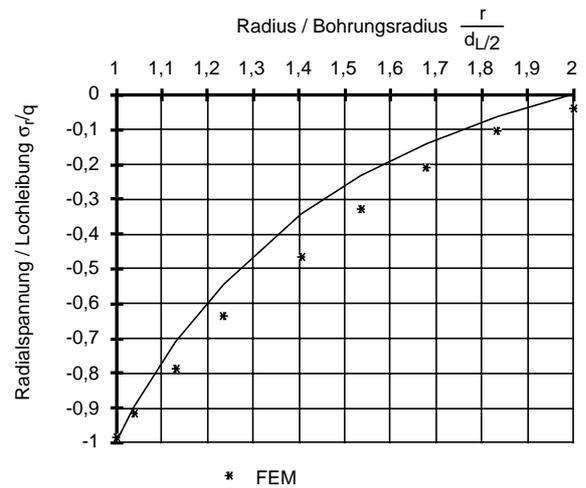


Bild 4.12 Radialspannungsverlauf für Bolzen-Lasche-Verbindung mit geringem Spiel, Ergebnisse nach FEM und Glg. 4-15

in den vorhergehenden Abschnitten ermittelten Beanspruchungen der ebenen Belastungsfälle durch geeignete Superposition eine Beurteilung der Beanspruchung des dreidimensionalen Bauteils zu erhalten. Da in den am höchsten belasteten Bereichen die Schubspannungen eine untergeordnete Rolle spielen und man daher zumindestens näherungsweise von einem Hauptspannungszustand sprechen kann, könnte ein Ansatz zur Überlagerung der Beanspruchungskomponenten wie folgt lauten

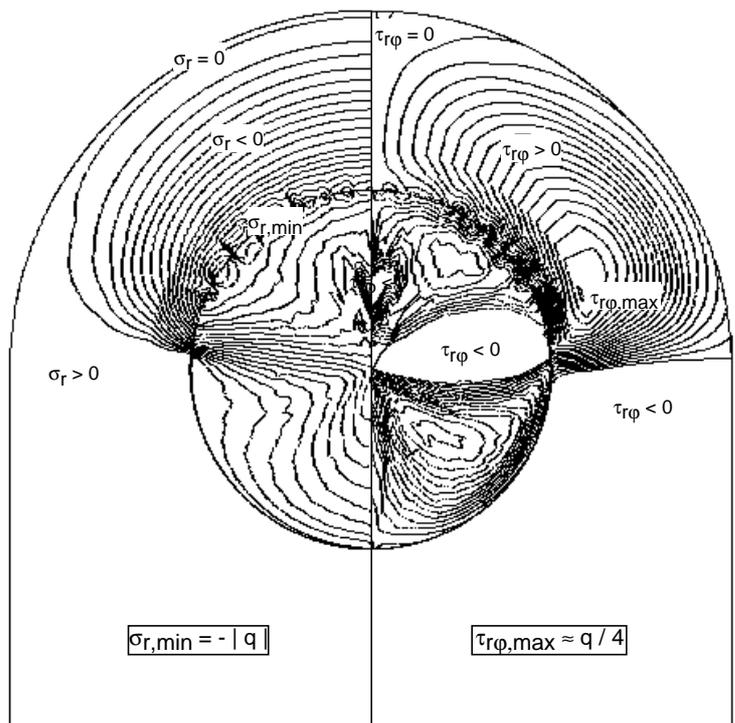


Bild 4.13 Linien gleicher Spannung in einem Augenstab mit einem Spiel von 0,1%, ermittelt mit FEM. Links: Radialspannung  $\sigma_r$ . Rechts: Schubspannung  $\tau_{r\phi}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \sigma_1 &\approx \sigma_r(r, \varphi) \\ \sigma_2 &\approx \sigma_t(r, \varphi) \\ \sigma_3 &\approx \sigma_a \end{aligned} \quad (4-16)$$

Dabei treten Spannungen in Bolzenaxialrichtung  $\sigma_a$  und ihre zugeordneten Schubspannungen in symmetrisch belasteten Verbindungen praktisch nicht auf.

Der kritische Ort einer Bolzenverbindung ist der Wangenquerschnitt. Hier erreicht die Tangentialspannung ihren Maximalwert. Nur bei sehr kleinen Bolzenspielen tritt hier zusätzlich eine Radialspannung auf. Auf jeden Fall ist zu prüfen, ob die Vergleichsspannung die Fließgrenze überschreitet.

Von meist geringerem Interesse ist die Kenntnis der Radialspannung an jedem Ort der Öse. Nach Ermittlung des mittleren Radialdrucks über den Kontaktwinkel und des Kontaktdruckverlaufes über die Kontaktbreite lassen sich diese nach ihrer Normierung (z.B. auf die Lochleibung) miteinander multiplizieren. Damit ist an jedem Ort der Kontaktzone der Kontaktdruck bekannt. Mit Hilfe der Formel für ein durch Innendruck belastetes Rohr kann mit diesem Wert in Abhängigkeit von der Ösengeometrie die Radialspannung im Bauteil ermittelt werden.

## 5. Optimierte Bolzen-Laschenverbindungen

Ausgehend vom klassischen Augenstab mit rechteckigem Laschenprofil und breitem Schenkel bieten sich sowohl der Quer- als auch der Längsschnitt zur Optimierung an, denn beide Ansichten zeichnen sich durch Verformungsbehinderungen aus, die unmittelbar zu Spannungsüberhöhungen führen. Durch geometrische Optimierung können auch Trägheitsmomente an unkritischen Querschnitten gezielt verringert werden. Wie die Ableitungen zur Kontaktdruckverteilung gezeigt haben, können schon kleine Deformationen erhebliche Spannungsminderungen bewirken.

Das eleganteste und am leichtesten in ein bestehendes FEM-Programmpaket zu integrierende Verfahren ist die von Mattheck /14/ propagierte CAO. Die hier gemachten Erfahrungen lassen jedoch erkennen, daß sich die Natur leider nicht uneingeschränkt kopieren läßt, da sie sowohl in den Ansätzen als auch in fertigungsbedingten Randbedingungen auf Schwierigkeiten stoßen. Die dabei gefundenen Bauteilformen sind prinzipiell nicht neu. Opti-

mierte Laschenprofile findet man seit vielen Jahren im Kraftfahrzeugpleuel. Bei der Entwicklung von Leichtbaukonstruktionen wurde von Hertel /8/ bereits eine Kontur vorgeschlagen, die der hier ermittelten stark ähnelt.

### 5.1 Optimierung der Laschenkontur

Ausgehend vom klassischen Augenstab wurden mit den ordnenden Gesichtspunkten Form, Anzahl und Orientierung örtlicher Materialeinsparungen Varianten diskutiert und kombiniert. Eine zusammenfassende Darstellung der untersuchten Laschengemetrien enthält **Bild 5.1**. Ausgehend von einer gewählten Geometrie wurden dabei mit Hilfe der CAO Optimierungen vorgenommen.

Als optimale Geometrie einer Lasche ergab sich die Form nach **Bild 5.2**. Sie hat gegenüber der Vollasche eine um 20% geringere Masse. Die biegegewiche Gestalt erlaubt den Abbau von Spannungsspitzen durch Vermeidung unnötiger Verformungsbehinderungen. Die maximalen Spannungen verringern sich im Kopfquerschnitt um 25 % und an der Einspannstelle um 21 % gegenüber der Vollasche. Diese Lasche erlaubt auch die Aufnahme hoher Druckbeanspruchungen durch die Ausbildung des parallelen Steges zwischen Aussparung und Bohrung - unter Druck versagt die Lasche bei etwa 76 % der zulässigen Zugkraft.

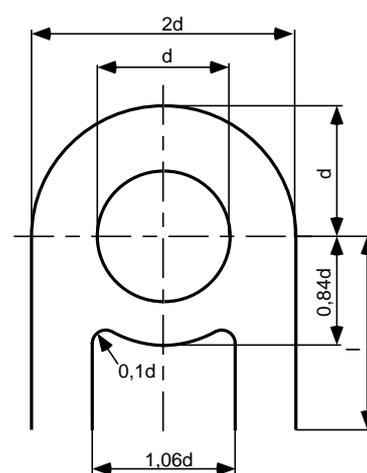


Bild 5.2 Optimierte Laschenform

Zur Verifizierung der numerischen Rechnungen wurden Bauteilzugversuche an Laschen vorgenommen, die aus Aluminium angefertigt wurden. Der Werkstoff Aluminium ermöglicht die Erreichung von großen Dehnungen bei kleinen

Zugkräften und somit eine bessere Meßbasis. **Bild 5.3** zeigt die Anordnung der Dehnmeßstreifen an einer optimierten Laschengemetrie. Zusätzlich zu den Messungen über Dehnmeßstreifen wurden an einer 3D-Meßmaschine die Verformungen auch bei überelastischer Beanspruchung gemessen. Als Auszug aus den Meßwerten zeigt **Bild 5.4** den Ver-

Geometrie	Bezeichnung	Volumen [%]	Bemerkung und Besonderheiten
	Grundlasche	100	voluminöse und steife Konstruktion, Verformungsbehinderung, große Spannungsüberhöhung
	eine mittige Bohrung	85,2	Durchmesser der Entlastungsbohrung muß größer als Hauptbohrung sein, Versagen an der Entlastungsbohrung
	zwei mittige Bohrungen in Längsachse	83,1	bei 90 mm Entlastungsbohrung wird Grenzspannung gleichzeitig an Entlastungs- u. Hauptbohrung erreicht
	ein mittiges Quadrat	84,1	Kantenlänge muß länger als Bohrungsdurchmesser sein, Verrundungsradius mindestens R = 10 mm
	vier mittige Bohrungen	85,2	weit außen liegende Entlastungsbohrungen stören den Kraftfluß
	zwei mittige Bohrungen in Querachse	92,6	weit außen liegende Entlastungsbohrungen stören den Kraftfluß
	seitlich eingezogene Lasche	85,2	Störung des Kraftflusses durch außen geschwächte Geometrie
	Kettenglied	70,9	optimale Führung des Kraftflusses, biegeweiche Konstruktion, aber keine Druckkraftübertragung möglich!
	ein mittiges Langloch	81,5	Weiterentwicklung einer mittigen Bohrung, Spannungsverlauf an der Hauptbohrung wird verbessert
	ein mittiges Rechteck	79,4	weitere Verbesserung der Spannungsverläufe gegenüber Langloch, Stegeometrie für Druckbelastung noch verbesserungswürdig
	verrundeter Rechteckausbruch	80,4	optimale Geometrie bei einer Aussparungsbreite von 106% des Bohrungsdurchmessers
	verrundeter Rechteckausbruch und runde Bohrung im	79,4	Verbesserung der Spannungsverläufe im Schenkel neben der Aussparung, aber Spannungsüberhöhung durch Kerbwirkung an den zusätzlichen
	verrundeter Rechteckausbruch und ovale Bohrung im	78,8	weitere Umlagerung von Spannungen in weniger beanspruchte Bereiche möglich, Ausführung kann je nach Anwendungsfall sinnvoll sein

Bild 5.1 Untersuchte Geometrien zur Optimierung der Laschenform

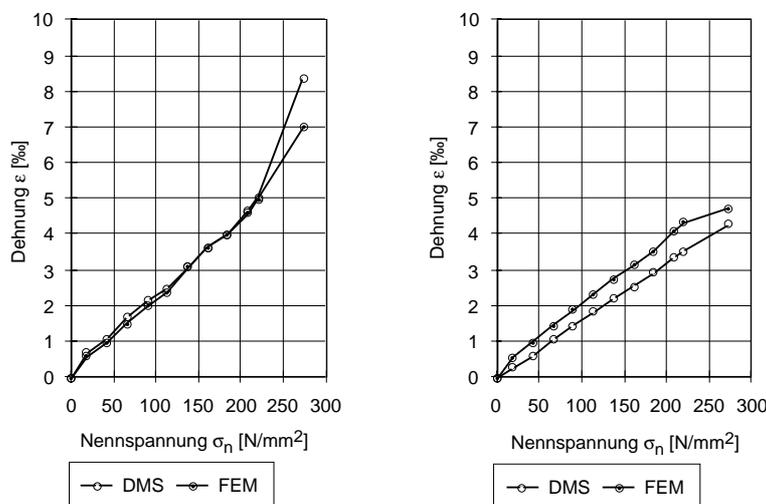


Bild 5.4 Vergleich der Dehnungen aus Versuchen und FEM-Berechnung. Links: Wange innen (Meßstelle 3, Bild 5.3). Rechts: Schenkel innen (Meßstelle 6, Bild 5.3)

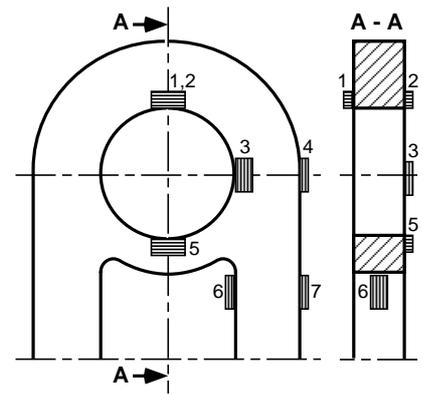


Bild 5.3 Anordnung der Dehnmeßstreifen auf der Versuchslasche mit optimierter Form

gleich der gemessenen und unter Berücksichtigung der Verfestigungen im Werkstoff berechneten Dehnungswerte. Dieser Vergleich zeigt, daß die Voraussagen über die FEM-Rechnungen bis weit in den teilplastischen Bereich hinein gelten.

### 5.2 Optimierung der Laschenprofile

Die Optimierung der Laschenprofile geschieht aus Gründen der Angleichung des Querschnitts-Widerstandsmomentes, aber auch insbesondere zur Optimierung der Kanten geometrie mit dem Zweck, durch Anfasen oder Abrunden das Kantentragen zu vermindern. Eine alleinige Veränderung der Bohrungsgeometrie führt dabei nicht zum Optimum, weil die Ausbildung der Flächenpressung über der Bohrungslänge dann von der Höhe der Belastung abhängt. Eine sinnvolle Maßnahme dagegen ist eine biegeweiche Gestaltung der Laschenkanten, wie sie in den in Bild 5.5 gezeigten Profilen dargestellt ist. Bezüglich dieser Profilformen ergeben vergleichende Berechnungen die folgenden Ergebnisse.

### 5.2.1 Trapezprofilaschen

Zwischen den beiden Extremfällen eines Trapezes (Rechteck und Dreieck) wurde die Laschenaußentiefe  $t_a$  variiert. Die Laschenbreite  $b$  entspricht jeweils der Laschentiefe  $t$ . Die in **Bild 5.6** dargestell-

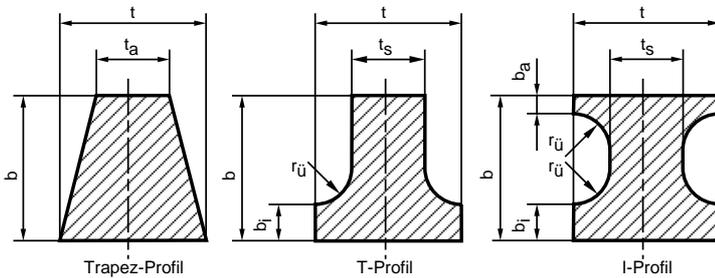


Bild 5.5 Typische Laschenprofile zur Spannungsminderung

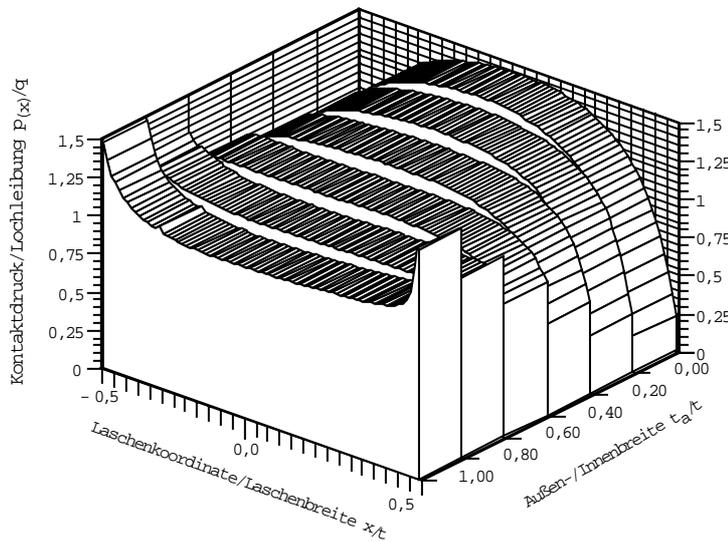


Bild 5.6 Kontaktdruckverteilung für Trapezprofile mit unterschiedlichen Breitenverhältnissen. Die Trapezhöhe entspricht der Innenbreite  $t$

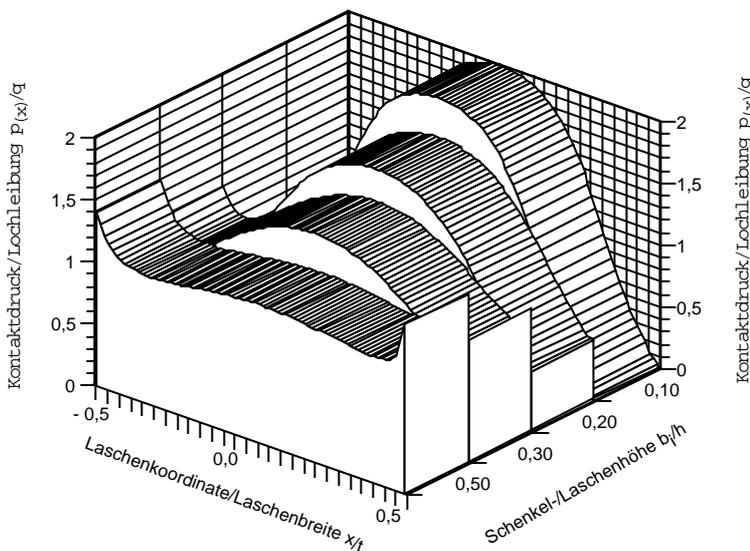


Bild 5.7 Kontaktdruckverteilung für T-Profile mit unterschiedlichem Verhältnis von Schenkelstärke zu Profilhöhe.

ten gefundenen grundsätzlichen Lastverteilungen über der Länge lassen erkennen, daß für ein Breitenverhältnis  $t_a/t \approx 0,75$  sich eine nahezu konstante Druckspannungsverteilung einstellt. Die gleichmäßige Ausnutzung des Querschnittes ist unabhängig

von der Lasthöhe, da sich sowohl im elastischen auch im plastischen Bereich Spannungen und Verformungen im gleichen Betrag ändern.

### 5.2.2 T-Profillaschen

Die Hauptparameter einer Variation sind bei diesen Profilen die Schenkelstärke  $b_i$  und die Stegdicke  $t_s$ . Zwischen Schenkel und Steg wurde der maximal mögliche Verrundungsradius ausgenutzt.

Vergleiche in **Bild 5.7** zeigen, daß die Schenkelstärke  $b_i$  einen wesentlich größeren Einfluß auf die Kontaktdruckverteilung nimmt als die Stegdicke  $t_s$ : Hohe Schenkel verursachen Kantentragen und kleine Schenkel Mittentragen. Ein optimales Profil hat eine Schenkelstärke von  $b_i/b \approx 0,4$ . Dagegen haben Stegbreitenänderungen nur einen relativ kleinen Einfluß auf das Tragverhalten.

### 5.2.3 I-Profillaschen

Bei der Untersuchung dieser Profile wurde die Geometrie der unteren Laschenhälfte vom T-Profil übernommen ( $b_i/b = 0,2$ ,  $t_s/t = 0,4$ ) und der äußere Schenkel in seiner Höhe variiert. Im Kontaktbereich entsprechen die Ergebnisse denen des T-Profils. Der gegenüber dem T-Profil zusätzlich vorhandene Außenschenkel bewirkt zwar eine Versteifung der Lasche und damit eine geringfügige Verringerung des Kontaktwinkels, hat jedoch auf das Kantentragen keinen Einfluß.

## 6.

### Zusammenfassung

Bei Bolzen-Lasche-Verbindungen treten drei nichtlineare Problemgebiete auf, die sich einer elementaren Berechnung entziehen: Die Ausbildung des Kontaktes zwischen Bolzen und Lasche unterteilt sich in die Bestimmung des Kontaktwinkels, die

Berechnung der Kontaktdruckverteilung und den Einfluß des Kantentragens. Ein weiterer nichtlinearer Einfluß ist das elastoplastische Materialverhalten.

Für die Beanspruchung in der Lasche ist die Verteilung des Kontaktdruckes über einen Kontaktwinkel entscheidend, da diese das in der Lasche wirkende Biegemoment beeinflusst. Je nach Bolzenspiel stellt sich eine unterschiedliche Verteilung ein, wobei man grundsätzlich die drei Fälle der rotationssymmetrischen Lasteinleitung über einen Winkel von  $180^\circ$ , den Lochleibungsdruck oder einen kosinusähnlichen Verlauf bei großen Bolzenspielen unterscheidet. Im Axialschnitt kommt es zu einem Kantentragen der Lasche, wobei linearelastische Ansätze meist eine Überbewertung der Beanspruchungen an der Laschenkante ergeben.

Um dieses nichtlineare und dreidimensionale Problem auf eine mit Ingenieurgenauigkeit arbeitende vereinfachende Berechnung zurückzuführen, wurden mit Hilfe umfangreicher FEM-Rechnungen der Einfluß typischer Parameter auf die Beanspruchung in der Lasche untersucht, beispielsweise die Lasteinleitung, die Schenkellänge, das Bolzenspiel usw. Diese systematische Variation der Einflüsse führt zu Abschätzungen über die gegenseitigen Abhängigkeiten, so daß man verschiedene Klassen von Einflüssen herausarbeiten kann, die dann in vereinfachten Berechnungssätzen eine Trennung der Problematik erlauben.

Als Ansatz für eine analytische Berechnung dient die Theorie des stark gekrümmten Balkens mit unterschiedlichen Lasteinleitungsklassen und Randbedingungen bezüglich der Schenkelfesselung. Ergebnisse dieser analytischen Ansätze und ihr Vergleich mit numerischen Berechnungen wie auch mit DMS-Messungen an Originalbauteilen zeigen eine für die Auslegungsrechnung solcher Verbindungselemente hinreichende Genauigkeit, wenn man die in den Laschen herrschenden Tangentialspannungen über den Sonderfall der punktförmigen Lasteinleitung berechnet und die Radialspannungen mit der Theorie des dickwandigen Rohres. Die Verteilung der Beanspruchungen über der Bohrungslänge kann getrennt durch eine überlagerte Abschätzung angegeben werden. Diese Ansätze und die FEM-Rechnung wurden genutzt zur Optimierung von Laschenformen mit dem Ziel einer gleichmäßigeren Werkstoffausnutzung. Allein durch Materialentnah-

me gelingt es, den Kraftfluß so umzuleiten, daß das Kantentragen im Längsschnitt und die Biegespannung in den kritischen Querschnitten minimiert werden, begleitet von einer Gewichtseinsparung von bis zu 20 %.

### Literatur

- /1/ Dubbel-Taschenbuch für den Maschinenbau. 14. Auflage. Springer Verlag 1981
- /2/ Niemann, G. und Winter, H.: Maschinenelemente. 2. Auflage. Band 1 bis 3. Springer Verlag 1983
- /3/ Steinhilper, W. und Röper, R.: Maschinen- und Konstruktionselemente. Band 1 und 2. Springer Verlag 1985
- /4/ Göldner, H. und Holzweißig, F.: Leitfaden der Technischen Mechanik. 5. Auflage. Steinkopff-Verlag Darmstadt 1976
- /5/ Rucizka, M. und Joensson, D.: Ergebnisse zu Spannungs- und Verformungsanalysen an Augenstäben. Maschinenbautechnik 35 (9), 1986. S. 409 - 413
- /6/ Theocaris, S.S.: The Stress Distribution in a Strip Loaded in Tension by Means of a Central Pin. Journ. Appl. Mech. 23 (3), 1956. S. 85 - 90
- /7/ Frocht, M.M. und Hill, H.N.: Stress Concentration Factors Around a Central Circular Hole in a Plate Loaded Through Pin in the Hole. Journ. Appl. Mech. 7 (3), 1940. S. 5 - 7
- /8/ Hertel, H.: Ermüdungsfestigkeit der Konstruktionen. Springer Verlag 1969
- /9/ Schijve, J., Broek, D. und Jacobs, F.A.: Fatigue Tests on Aluminium Alloy with Special Reference to Fretting. Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, Amsterdam
- /10/ Göldner, H. u.a.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre 1. 3. Auflage, Band 1, Springer Verlag 1991
- /11/ Poócza, A.: Berechnung von scheibenförmigen Kettengliedern. Konstruktion 28 (5), 1976. S. 190 - 192
- /12/ Bantlin, A.: Beitrag zur Bestimmung der Biegespannung in gekrümmten stabförmigen Körpern. Z-VDI 45, 1901. S. 164 - 168
- /13/ Baumann, A.: Berechnung von gekrümmten Stäben Z-VDI 52, 1908. Teil 1: S. 337 - 345, Teil 2: S. 376 - 382
- /14/ Mattheck, C.: Design in der Natur - Der Baum als Lehrmeister. 2. Ausg. Rombach Verlag Freiburg 1993